ΟΜΙΛΟΣ ΑΡΙΣΤΕΙΑΣ

Το Μαθηματικό Άπειρο

Η πορεία από την Άλγεβρα προς την Ανάλυση

Δημιουργία εξωφύλλου: Κατερίνα Θεοδωρέλου

Αλκιβιάδης Γ. Τζελέπης

Αθήνα 2013

<u>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</u>

1η Έκδοση: Οκτώβριος 2013

Το βιβλίο αυτό δημιουργήθηκε για να υποστηρίξει τη διδασκαλία του Ομίλου Αριστείας στα Μαθηματικά, με τίτλο «Το μαθηματικό Άπειρο», στα πλαίσια του προγράμματος διδασκαλίας στο Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης.

<u>Σε ποιους απευθύνεται</u>: Απευθύνεται σε μαθητές Β΄ Λυκείου, θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

<u>Στόχοι - Περιεχόμενο</u>: Η ανάλυση της Γ΄ Λυκείου είναι ένας ιδιαίτερα απαιτητικός κλάδος των μαθηματικών ο οποίος διαπραγματεύεται δύσκολες έννοιες. Η έννοια του απείρου, του ορίου, της παραγώγου και του ολοκληρώματος, απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή και ικανότητες από τους μαθητές. Περιεχόμενο του ομίλου είναι αφενός μεν, η παρακολούθηση της διαχρονικής εξέλιξης αυτών των εννοιών, από την εποχή του Πυθαγόρα έως την καθιέρωση του σύγχρονου απειροστικού λογισμού. Αφετέρου δε, μία πρώτη επαφή με την ύλη της Γ΄ Λυκείου, σε επίπεδο διαισθητικής προσέγγισης, ορισμών και παραδειγμάτων.

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

<u>ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ</u>

Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις:

1. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός;
2. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός;
3. Να τοποθετήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 0,333… και 0,3
4. Δίνονται τα σύνολα Α = {1, 2, 3, 4, …} και Β = {1, 4, 9, 16, …}. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση που αναφέρεται στους πληθικούς αριθμούς των συνόλων:
   Α. Ν(Α) > Ν(Β)   Β. Ν(Α) < Ν(Β)   Γ. Ν(Α) = Ν(Β)
5. Να κάνετε το ίδιο για τα σύνολα Α = {1, 2, 3, 4, 5, …} και Β = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}
6. Υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 2; Πόσοι και να γράψετε κάποιους
7. Υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 3; Πόσοι και να γράψετε κάποιους
8. Υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί στην ερώτηση 6 ή στην ερώτηση 7;
9. Έστω Α το σύνολο όλων των τετραγώνων με πλευρές 1, 2, 3, … Ποιο είναι το τελευταίο τετράγωνο του συνόλου;
10. Δίνεται το σύνολο Α = {1, 2, 3, …} και το σύνολο $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση που αναφέρεται στους πληθικούς αριθμούς των συνόλων:
    Α. Ν(Α) > Ν(Β)   Β. Ν(Α) < Ν(Β)   Γ. Ν(Α) = Ν(Β)
11. Ο αριθμός 0, 222… είναι ένας “άπειρος” αριθμός
12. Ο αριθμός π έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία
13. Οι κόκκοι της άμμου είναι άπειροι
14. Ονομάζουμε άπειρο τον μεγαλύτερο αριθμό που υπάρχει
15. Ονομάζουμε άπειρη μία διαδικασία που δεν τελειώνει ποτέ
16. Έχω ένα σακούλι με όλες τις δυνατές κυρτές γωνίες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εξάγω μία. Η πιθανότητα να εκλέξω οξεία, είναι:
    a. 1/2
    b. τείνει στο 1/2
    c. 1/3

17. Το άπειρο άθροισμα: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 +… ισούται:
    a. Με θετικό αριθμό, τον οποίο δεν μπορούμε να βρούμε
    b. Με +∞ (συν άπειρο)
    c. Με 1
    d. Το άπειρο άθροισμα δεν έχει νόημα
18. Το άπειρο άθροισμα: 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 +... ισούται:
    a. Με + ∞
    b. Δεν υπολογίζεται.
    c. Με 1
19. Ένα σχήμα με άπειρη περίμετρο, θα έχει και άπειρο εμβαδόν
    a. Λάθος
    b. Δεν μπορούμε να ξέρουμε.
    c. Σωστό
20. A = 1 – 2 + 4 – 8 – 16 + 32 – 64 + ... <=> A = 1 – 2 (1 – 2 + 4 – 8 + 16 – 36 + ...) <=> A = 1 – 2 A <=> 3A = 1 <=> A = 1/3 . Το τελευταίο αποτέλεσμα
    a. Είναι λανθασμένο.
    b. Είναι σωστό.
21. Ο μεγαλύτερος αριθμός του ανοικτού διαστήματος [2, 3) είναι:
    a. Υπάρχει, αλλά δεν μπορούμε να τον βρούμε
    b. Δεν υπάρχει
    c. 2,9999999999999...
    d. Το 3
22. Υπάρχουν διαφορετικά είδη απείρου;
    a. Ναι
    b. Όχι
23. Η μεγαλύτερη τιμή για μία γωνία ενός τριγώνου είναι:
    a. 179 μοίρες
    b. 180 μοίρες
    c. Δεν υπάρχει
    d. 179,999 μοίρες

24. Έχω ένα σακούλι με όλες τις δυνατές κυρτές γωνίες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εξάγω 1.000.000.000 γωνίες. Η πιθανότητα να εκλέξω ορθή, είναι:

    a. Πολύ κοντά στο 1
    b. Πολύ κοντά στο 0
    c. 0
    d. Δεν υπολογίζεται ακριβώς.
    e. 1

25. Αν θεωρήσω ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει τους αριθμούς [0,1] και το τμήσω με μια ευθεία τυχαία. Τότε η πιθανότητα να το τμήσω σε ρητό αριθμό είναι:

    a. Δεν έχει νόημα μια τέτοια πιθανότητα, δεν ορίζεται
    b. Δεν γνωρίζουμε, αλλά είναι θετική αυτή η πιθανότητα
    c. 1
    d. 1/2
    e. 0

<u>ΣΧΟΛΙΟ 1</u>: Το ερωτηματολόγιο αποσκοπεί στο να αναζητήσει τις αντιλήψεις των μαθητών αναφορικά με το άπειρο.

<u>ΣΧΟΛΙΟ 2</u>: *Albert Einstein: "Δύο πράγματα είναι άπειρα. Το σύμπαν και η ανθρώπινη βλακεία, αν και δεν είμαι καθόλου σίγουρος για το πρώτο"*

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 1^{η}</u>

Τα παράδοξα του Ζήνωνα για την κίνηση (*)

1) Ο Αχιλλέας και η χελώνα

Ο Αχιλλέας συναγωνίζεται μία χελώνα που ξεκίνησε πριν από αυτόν και δε θα μπορέσει ποτέ να προηγηθεί της χελώνας.

Τη χρονική στιγμή που ο Αχιλλέας θα έχει φθάσει στην αρχική θέση της χελώνας, αυτή θα έχει προηγηθεί λίγο ακόμη. Η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον και έτσι ποτέ ο Αχιλλέας δε θα φθάσει και επομένως προσπεράσει τη χελώνα.

2) Η διχοτόμηση

Ένας δρομέας θέλει να διανύσει μία απόσταση d = AB. Για να γίνει αυτό όμως, πρέπει πρώτα να διανύσει το μισό της απόστασης $\frac{d}{2}$, πιο πριν όμως το ένα τέταρτο της απόστασης $\frac{d}{4}$, κ.ο.κ.

Επομένως πρέπει να πλησιάσει μια άπειρη ομάδα σημείων μέσα σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Είναι όμως αδύνατο να εξαντλήσει μία άπειρη συλλογή και κατά συνέπεια το ξεκίνημα της κίνησης είναι αδύνατο (πατήστε στην παρακάτω υπερσύνδεση)

What is Zeno's Dichotomy Paradox? - Colm Kelleher

<u>Συμπέρασμα</u>: Η κίνηση είναι αδύνατη αν δεχθούμε την ύπαρξη των άπειρων υποδιαιρέσεων του χώρου και του χρόνου. Στον Αχιλλέα οι υποδιαιρέσεις είναι προοδευτικές, ενώ στον δρομέα οι υποδιαιρέσεις είναι αναδρομικές.

3) Το βέλος

Ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε πτήση καταλαμβάνει χώρο ίσο προς τον όγκο του. Οτιδήποτε όμως καταλαμβάνει συνεχώς χώρο ίσο προς τον όγκο του, ουσιαστικά δεν βρίσκεται σε κίνηση. Επομένως το βέλος είναι συνεχώς ακίνητο και η κίνησή του είναι οφθαλμαπάτη.

4) Το Στάδιο

Υπάρχουν τέσσερα αντικείμενα (ας τα συμβολίσουμε A_1, A_2, A_3, A_4) ίσου μεγέθους τα οποία είναι στάσιμα.

Τέσσερα αντικείμενα (B_1, B_2, B_3, B_4) ίσου μεγέθους με τα Α, τα οποία κινούνται προς τα δεξιά, έτσι ώστε σε μία στιγμή (το μικρότερο δυνατό χρονικό διάστημα) το κάθε B_i να προσπερνά το κάθε A_i

Τέσσερα αντικείμενα ($Γ_1$, $Γ_2$, $Γ_3$, $Γ_4$) ίσου μεγέθους με τα Α και Β, τα οποία κινούνται ομαλά προς τα αριστερά σε σχέση με τα Α και Β, έτσι ώστε σε μία στιγμή (το μικρότερο δυνατό χρονικό διάστημα) το κάθε $Γ_i$ να προσπερνά το κάθε A_i

Ας υποθέσουμε ότι τα σώματα μια δεδομένη χρονική *στιγμή* βρίσκονται στις ακόλουθες θέσεις:

	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	B_2	B_3	B_4		
		$Γ_1$	$Γ_2$	$Γ_3$	$Γ_4$

Μετά τη διέλευση μιας ***στιγμής,*** δηλαδή μετά την πάροδο ενός αδιαίρετου χρονικού διαστήματος, οι θέσεις γίνονται ως ακολούθως:

A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	B_2	B_3	B_4
$Γ_1$	$Γ_2$	$Γ_3$	$Γ_4$

Είναι προφανές ότι με τη διέλευση μιας *στιγμής*, το $Γ_1$ θα έχει προσπεράσει δύο από τα $B_{i.}$ Επομένως, η *στιγμή* δεν μπορεί να είναι το μικρότερο χρονικό διάστημα, γιατί μπορούμε να θεωρήσουμε ως τη μικρότερη μονάδα χρόνου, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το $Γ_1$ να προσπεράσει ένα από τα B_i

<u>Συμπέρασμα</u>: Στα δύο τελευταία παραδείγματα φαίνεται ότι η κίνηση είναι αδύνατη, αν υποθέσουμε το ακριβώς αντίθετο. Δηλαδή, ότι σταματά η δυνατότητα υποδιαίρεσης του χώρου και του χρόνου.

(*) Σχόλια:

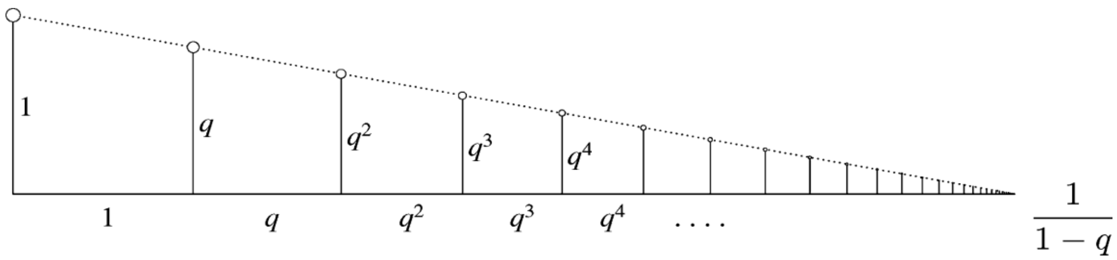
Ο Ζήνων ο Ελεάτης (έζησε γύρω στα 450 π.Χ., ανήκε στη Φιλοσοφική Σχολή του Παρμενίδη με κυρίαρχο δόγμα την ενότητα και τη συνέχεια της ύπαρξης) προσπάθησε να βρει επιχειρήματα που να αποδεικνύουν την ασυνέπεια στις έννοιες της πολλαπλότητας και της διαιρετότητας, οι οποίες ήταν κομβικές στη Φιλοσοφική Σχολή των Πυθαγορείων. Οι Πυθαγόρειοι είχαν υποθέσει ότι ο χώρος και ο χρόνος αποτελούνται από σημεία και στιγμές, αλλά ταυτόχρονα έχουν και μια ιδιότητα που δύσκολα την ορίζουμε, παρότι εύκολα τη διαισθανόμαστε, τη “συνέχεια”. Τα ύστατα στοιχεία που συνιστούν ένα θέμα, θεωρούνταν ότι κατέχουν από τη μια μεριά τα χαρακτηριστικά μιας γεωμετρικής μονάδας – του σημείου – και από την άλλη, συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των αριθμών. Ο Αριστοτέλης περιέγραψε το πυθαγόρειο σημείο ως “τη μονάδα σε κάποια θέση” ή “τη μονάδα στο χώρο”.

Τα επιχειρήματα του Ζήνωνα επηρέασαν βαθιά την ανάπτυξη των ελληνικών μαθηματικών, ισότιμα σχεδόν με την ανακάλυψη των άρρητων. Ο κόσμος των αριθμών είχε ακόμη την ιδιότητα της διακριτότητας, αλλά αυτός των συνεχών μεγεθών ήταν κάτι που δεν είχε σχέση με τους αριθμούς. Έτσι, τον μελετούσαν με γεωμετρικές μεθόδους, με συνέπεια στα Στοιχεία του Ευκλείδη ακόμη και οι ίδιοι οι ακέραιοι αντιπροσωπεύονταν από ευθύγραμμα τμήματα. Φαινόταν ότι τον κόσμο κυβερνούσε η γεωμετρία και όχι ο αριθμός.

<u>Βασικές γνώσεις θεωρίας</u>:

Άθροισμα Απείρων Όρων Απολύτως Φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου:

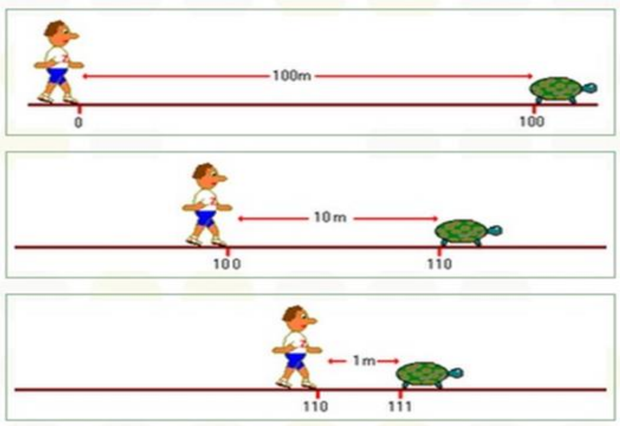
Το άθροισμα των άπειρων όρων μιας απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ, με $|\lambda| < 1$, είναι ίσο με: $S = \frac{a_1}{1-\lambda}$ (1)

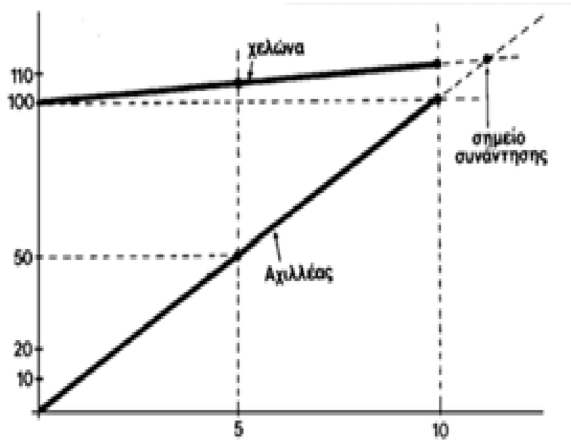


“Geometric” view of the geometric series

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Υποθέτουμε πως η χελώνα ξεκινάει 100m μπροστά από τον Αχιλλέα ο οποίος τρέχει με ταχύτητα 10m/s. Έστω ότι η χελώνα κινείται με ταχύτητα 1m/s. Όταν λοιπόν ο Αχιλλέας θα έχει διανύσει τα 100m, η χελώνα θα βρίσκεται 10m μπροστά του. Όταν θα διανύσει αυτά τα 10 μέτρα, η χελώνα θα βρίσκεται 1m μπροστά του. Όταν διανύσει αυτό το 1m, η χελώνα θα βρίσκεται 0,1m μπροστά του, και ούτω καθεξής. Επομένως, σύμφωνα με τον Ζήνωνα, ο Αχιλλέας δε θα προσπεράσει ποτέ τη χελώνα.





Είναι μια προφανής αντινομία, η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι “το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων είναι άπειρο”

Να αποδείξετε, με τη βοήθεια του τύπου (1) ότι ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα μετά από $\frac{100}{9}$ sec.

2. Στο πρόβλημα της διχοτόμησης, ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η απόσταση είναι d = 2 Km και η ταχύτητα του δρομέα είναι 1 Km/min. Τότε το μισό της απόστασης $\frac{d}{2}$ θα διανυθεί σε χρόνο $t_1 = 1$ min, το μισό του υπολοίπου της απόστασης $\frac{d}{4}$ σε χρόνο $t_2 = \frac{1}{2}$ min, το μισό του υπολοίπου, δηλ. το $\frac{d}{8}$ σε χρόνο $t_3 = \frac{1}{4}$ min, κ.τ.λ. Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να διανυθεί ολόκληρη η απόσταση d = AB.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2η

Η γεωμετρική ατομική θεωρία του Δημόκριτου

Ο Δημόκριτος από τα Άβδηρα (460 – 370 π.Χ.)

Ο Δημόκριτος υποστήριζε ότι όλα τα φαινόμενα έπρεπε να εξηγηθούν συναρτήσει απείρως μικρών και απείρως διαφορετικών (τόσο σε μέγεθος όσο και σε σχήμα) αδιαπέραστων, σκληρών ατόμων, κινούμενων ασταμάτητα στο χώρο. Η δημιουργία του κόσμου μας – και άπειρων άλλων – ήταν το αποτέλεσμα μιας ταξινόμησης ατόμων σε ομάδες με συγκεκριμένες ομοιότητες.

Ο Αρχιμήδης αποδίδει στον Δημόκριτο την απόδειξη (όχι όμως με την απαιτούμενη αυστηρότητα), ότι ο όγκος μιας πυραμίδας ισούται με το ένα τρίτο του γινομένου της βάσης επί το ύψος της, δηλαδή $V_{\Pi} = \frac{1}{3}\ E_B \cdot \upsilon$ (απαιτούνται γνώσεις ανάλυσης, ισοδύναμης με αυτές του απειροστικού λογισμού).

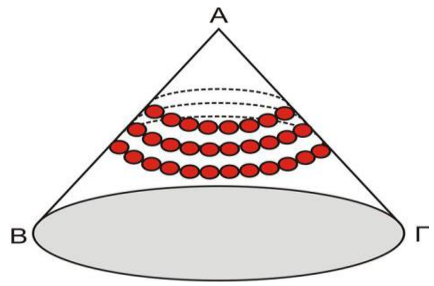
Ενδεχομένως ο Δημόκριτος να απέδειξε το εξής*: ένα τριγωνικό πρίσμα μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις τριγωνικές πυραμίδες, οι οποίες έχουν ίσα ύψη και εμβαδά βάσης (από όπου προκύπτει το γνωστό αιγυπτιακό θεώρημα), βασιζόμενος στην **υπόθεση** ότι οι πυραμίδες που έχουν ίσα ύψη και ίσα εμβαδά βάσης είναι ίσες.*

Η *υπόθεση* δικαιολογείται με την εφαρμογή απειροστικών μεθόδων: αν δύο πυραμίδες με ίσες βάσεις και ίσα ύψη αποτελούνται από άπειρες, απείρως λεπτές εγκάρσιες τομές σε ***αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία*** (*), τότε δικαιολογείται η υπόθεση.

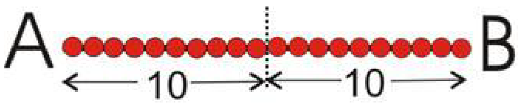
Ο Αρχιμήδης αποδίδει επίσης στον Δημόκριτο τη σχέση: *ο όγκος ενός κώνου ισούται με το 1/3 του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου*

Η γεωμετρική ατομική θεωρία του Δημόκριτου όμως βρέθηκε αντιμέτωπη με σημαντικά προβλήματα. Αν η πυραμίδα ή ο κώνος αποτελούνται από απείρως πολλές απείρως λεπτές τριγωνικές ή κυκλικές τομές παράλληλες προς τη βάση, η θεώρηση δύο οποιονδήποτε γειτονικών φύλλων οδηγεί σε **παράδοξο**. Αν οι γειτονικές τομές είναι ισεμβαδικές, τότε όλες οι τομές έχουν το ίδιο εμβαδόν και το σύνολό τους θα είναι ένα πρίσμα ή ένας κύλινδρος αντίστοιχα και όχι πυραμίδα ή κώνος. Αν, πάλι, οι γειτονικές τομές δεν είναι ισεμβαδικές, το σύνολό τους θα είναι μια “κλιμακοειδής” πυραμίδα ή ένας “κλιμακοειδής” κώνος εν αντιθέσει με τα γνωστά στερεά με την ομαλή επιφάνεια.

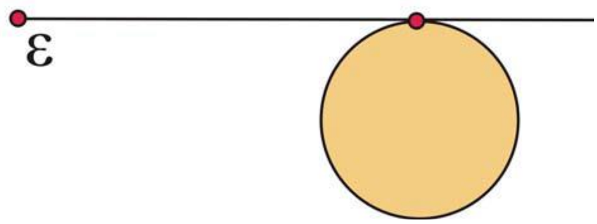
Ο Δημόκριτος αν και πιστεύει ότι όλα στη φύση συγκροτούνται από άτομα, απείρως μικρά και άτμητα πλέον τμήματα ύλης (άτομα), στη Γεωμετρία διατυπώνει τη σκέψη: «Δύο εφαπτόμενοι κυκλικοί δίσκοι ενός κώνου, με απείρως μικρό πάχος (π.χ. πάχους ενός σημείου) δεν μπορεί να είναι ίσοι γιατί αυτό συμβαίνει στον κύλινδρο, δεν μπορεί όμως να είναι ούτε άνισοι, γιατί τότε η κυρτή επιφάνεια του κώνου θα παρουσίαζε ασυνέχεια»



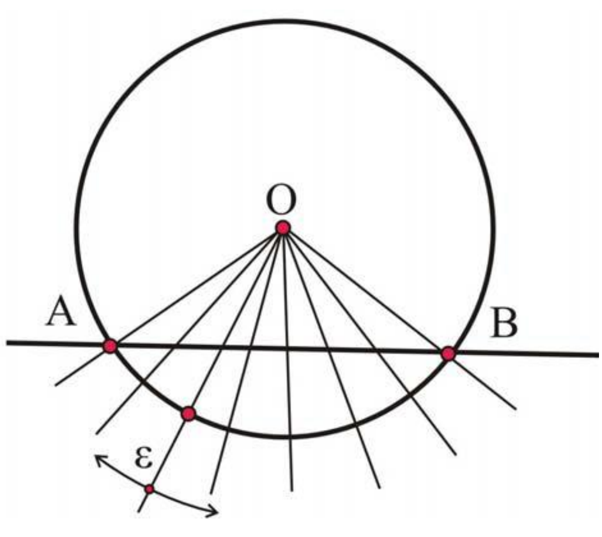
Η άποψη δηλαδή, ότι το σημείο είναι **υλική οντότητα**, απείρως μικρή και πλέον άτμητη, δημιουργούσε κάποιες θεωρητικές δυσκολίες στη θεμελίωση της Γεωμετρίας. Για παράδειγμα, τα ευθύγραμμα τμήμα που σχηματίζονται από άρτιο πλήθος σημείων δεν έχουν μέσον, δηλαδή δεν υπάρχει σημείο του τμήματος που εκατέρωθεν του να υπάρχει ίσο πλήθος σημείων.



Οι Πυθαγόρειοι στην αριθμοθεωρία τους έδιναν προνομιακή θέση στους περιττούς αριθμούς γιατί διαθέτουν “μέσον”. Στην αντίληψη αυτή γίνεται φανερή η αντιστοίχιση αριθμών και ευθυγράμμων τμημάτων.
Τελικά λοιπόν ορίστηκε το σημείο ως **άυλη**, χωρίς μέρη, οντότητα. Όμως πάλι τα πράγματα δεν μπήκαν στη θέση τους. Και αυτό γιατί, ενώ η πιο πάνω παραδοχή αποδυναμώνει κάποια κριτική, εντούτοις γεννούσε νέα προβλήματα. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.
Η παραδοχή ότι τα σημεία είναι άυλα δημιουργούσε συλλογισμούς όπως:
«Ανάμεσα σε δύο σημεία, οσοδήποτε κοντινά, υπάρχουν πάντα και άλλα σημεία», δηλαδή «Δεν υπάρχουν γειτονικά σημεία».
Έτσι γεννιόταν η εύλογη απορία για το «Πώς κολλάνε, κατά την πρόσθεση ευθυγράμμων τμημάτων, τα ακριανά σημεία Β, Γ των τμημάτων, αφού πάντα μεταξύ τους θα υπάρχουν και άλλα σημεία;» ή ακόμη
«Πώς εφάπτεται μία ευθεία μιας περιφέρειας αφού ανάμεσα στο σημείο επαφής της ευθείας και το αντίστοιχο της περιφέρειας θα υπάρχουν και άλλα σημεία;»



Ένα άλλο παράδοξο, που γεννά η παραδοχή του άυλου, είναι το εξής:
Θεωρούμε μία χορδή ΑΒ ενός κύκλου και το αντίστοιχο τόξο της. Ακόμα μία ευθεία Οε που στρέφεται γύρω από το Ο. Ας θεωρήσουμε ότι η ευθεία αυτή στρεφόμενη σαρώνει τη γωνία ΑΟΒ. Τότε σε κάθε θέση της, αυτή τέμνει και τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της σε δύο σημεία. Αυτό συμβαίνει σε κάθε στιγμή της κίνησης και δημιουργεί μία αντιστοιχία, ένα προς ένα, ανάμεσα στα σημεία της χορδής και του τόξου. Έτσι αντιλαμβανόμαστε ότι η χορδή και το τόξο της αποτελούνται από το ίδιο πλήθος σημείων και επομένως έχουν ίσα μήκη.
Όμως το συμπέρασμα αυτό είναι αντίθετο στην καθημερινή εμπειρία και στις πληροφορίες που μας παρέχουν οι αισθήσεις μας.



Τέτοια παραδείγματα και συλλογισμοί θα πρέπει να προβλημάτισαν τους Γεωμέτρες σε όλη τη διάρκεια της ελληνικής αρχαιότητας. Φαίνεται όμως ότι επικράτησε η παραδοχή του άυλου.

(*) **<u>Βασικές γνώσεις θεωρίας</u>:**

<u>Ορισμός 1</u>. Δύο σύνολα Α και Β λέμε ότι βρίσκονται σε μία 1 – 1 (αμφιμονοσήμαντη) αντιστοιχία, όταν έχουμε μία αντιστοίχιση των στοιχείων του Α με τα στοιχεία του Β, τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα στοιχείο του Β και αντίστροφα.

<u>Ορισμός 2</u>. Δύο σύνολα Α και Β λέμε ότι είναι ισοδύναμα, και γράφουμε $A \sim B$, αν και μόνο αν μπορούν να τοποθετηθούν σε μία 1 – 1 αντιστοιχία.

<u>Ορισμός 3</u>. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

ή ισοδύναμα: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των γραμμάτων της αλφαβήτου και των εικοσιτεσσάρων πρώτων φυσικών αριθμών. Υπάρχει μοναδική αντιστοίχιση ή είναι περισσότερες της μία οι επιτρεπτές;

2. Να γράψετε τα σύνολα των άρτιων θετικών και των περιττών θετικών και να αποδείξετε ότι είναι ισοδύναμα.

Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση η οποία να απεικονίζει το “άρτιοι θετικοί” ⇒ “περιττοί θετικοί”;

3. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού τους:

$i)\ f(x) = ax + b,\ \ ii)\ f(x) = ax^2,\ \ iii)\ f(x) = \dfrac{a}{x},\ \ iv)\ f(x) = \eta\mu x,$

$v)\ f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ \ vi)\ f(x) = \varepsilon\varphi x,\ \ vii)\ f(x) = \sigma\varphi x$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3η

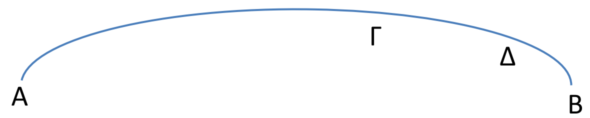
Η μέθοδος της εξάντλησης Ευδόξου – Αρχιμήδη

Η πρώτη κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών που αφορούσε στην ανακάλυψη των άρρητων αριθμών αντιμετωπίσθηκε με επιτυχία χάρη στον Εύδοξο. Ο Εύδοξος έδωσε τη λύση όμως σε ένα ακόμα άλυτο πρόβλημα της εποχής του. Τη σύγκριση των καμπυλόγραμμων και των ευθύγραμμων τμημάτων. Κατά τον Αρχιμήδη, ο Εύδοξος παρουσίασε το λήμμα που φέρει σήμερα το όνομα του Αρχιμήδη – ονομάζεται επίσης και αξίωμα της συνέχειας – και το οποίο ήταν η βάση της μεθόδου της εξάντλησης, του ελληνικού “ολοκληρωτικού λογισμού”.

Αξίωμα: Δεδομένων δύο μεγεθών τα οποία έχουν λόγο (δηλαδή κανένα από τα δύο να μην είναι μηδέν) μπορούμε να βρούμε ένα πολλαπλάσιο οποιουδήποτε από τα δύο το οποίο να είναι μεγαλύτερο του άλλου.

Από το αξίωμα αυτό του Ευδόξου αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας *απαγωγή σε άτοπο*, η παρακάτω πρόταση, η οποία σχημάτιζε τη βάση της ελληνικής μεθόδου της εξάντλησης.

Η ιδιότητα της εξάντλησης: Αν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του, αν από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε πάλι τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και αν συνεχίσουμε αυτήν τη διαδικασία των αφαιρέσεων, θα καταλήξουμε σε μέγεθος μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους.



Στο σχήμα, από το τμήμα ΑΒ αφαιρούμε το ΑΓ και από το ΓΒ αφαιρούμε το ΓΔ κ.ο.κ.

Η παραπάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την πρώτη πρόταση στο δέκατο βιβλίο του Ευκλείδη και είναι ισοδύναμη επίσης με την ακόλουθη σύγχρονη πρόταση:

Δίνεται ένα δεδομένο μέγεθος Μ, ένα προκαθορισμένο μέγεθος ε του ίδιου είδους και r ένας λόγος τέτοιος ώστε $\frac{1}{2} \le \mathrm{r} < 1$. Τότε μπορούμε να βρούμε ένα θετικό ακέραιο Ν, τέτοιον ώστε

$$\mathrm{M} \cdot (1-\mathrm{r})^n < \varepsilon \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } \mathrm{n} > \mathrm{N}, \text{ δηλαδή } \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}(1-\mathrm{r})^n = 0$$

Οι Έλληνες χρησιμοποίησαν αυτήν την ιδιότητα για να αποδείξουν θεωρήματα για τα εμβαδά και τους όγκους καμπυλόγραμμων σχημάτων. Στον Εύδοξο αποδίδεται η πρώτη ικανοποιητική απόδειξη, ότι ο όγκος του κώνου ισούται με το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Προηγήθηκαν απλοϊκές υποδείξεις, ότι για την εύρεση του εμβαδού ενός κύκλου για παράδειγμα, αρκούσε να εγγράψουμε σε αυτόν ένα κανονικό πολύγωνο και να αυξήσουμε τον αριθμό των πλευρών του επ’ άπειρον.

Παράδειγμα της μεθόδου της εξάντλησης: Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους (βλ. Στοιχεία XII.2)

Απόδειξη

Το πρόβλημα τίθεται ως εξής:

Δίνονται δύο κύκλοι κ και Κ, με διαμέτρους δ και Δ, και εμβαδά α και Α αντίστοιχα. Θα αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{A} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}$

Η απόδειξη θα είναι έμμεση, αποκλείοντας τις περιπτώσεις $\frac{\alpha}{A} < \frac{\delta^2}{\Delta^2}$ και $\frac{\alpha}{A} > \frac{\delta^2}{\Delta^2}$

Έστω ότι ισχύει $\frac{\alpha}{A} > \frac{\delta^2}{\Delta^2}$

Τότε θα υπάρχει κάποιο $\alpha' < \alpha$ έτσι ώστε $\frac{\alpha'}{A} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}$ (υπόθεση (1))

Έστω $\alpha - \alpha' = \varepsilon > 0$ μία προκαθορισμένη τιμή

Στους κύκλους κ και Κ εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών n και εμβαδά p_n και P_n αντίστοιχα.

Στη συνέχεια θεωρούμε τα ενδιάμεσα εμβαδά των επιφανειών που βρίσκονται μεταξύ των εγγεγραμμένων πολυγώνων και των κύκλων

Αν τώρα διπλασιάσουμε τον αριθμό των πλευρών των πολυγώνων, είναι προφανές ότι θα αφαιρέσουμε από τα ενδιάμεσα εμβαδά περισσότερο από το μισό τους. Κατά συνέπεια, εξαιτίας της ιδιότητας της εξάντλησης, τα ενδιάμεσα εμβαδά ελαττώνονται με διαδοχικούς διπλασιασμούς των πλευρών των πολυγώνων (δηλαδή αυξάνοντας το n) έως ότου $\alpha - p_n < \varepsilon$

Τότε, αφού $\alpha - \alpha' = \varepsilon$, έχουμε $\alpha - p_n < \alpha - \alpha' \Leftrightarrow p_n > \alpha'$

Γνωρίζουμε όμως από προηγούμενα θεωρήματα ότι $\frac{p_n}{P_n} = \frac{\delta^2}{\Delta^2} \xRightarrow{(\text{υπόθεση } (1))} \frac{p_n}{P_n} = \frac{\alpha'}{A} \xRightarrow{p_n > \alpha'} P_n > A$

Δηλαδή για το εμβαδόν (P_n) ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με εμβαδόν (Α), είναι: $P_n > A$, το οποίο είναι προφανώς άτοπο.

Έτσι αποδεικνύεται ότι η σχέση $\frac{\alpha}{A} > \frac{\delta^2}{\Delta^2}$ είναι λανθασμένη και με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η σχέση $\frac{\alpha}{A} < \frac{\delta^2}{\Delta^2}$ είναι λάθος.

Επομένως με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, προκύπτει το ζητούμενο, ότι $\frac{\alpha}{A} = \frac{\delta^2}{\Delta^2}$

Σχόλιο 1: Η ιδιότητα που απεδείχθη είναι το πρώτο ακριβές θεώρημα για τα μεγέθη των καμπυλόγραμμων σχημάτων και δίνει στον Εύδοξο τον τίτλο του πατέρα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Σχόλιο 2: Δεν είχαν όλοι στην αρχαία Ελλάδα την ίδια γνώμη για τη χρησιμότητα του απείρου. Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του Αριστοτέλη, του οποίου η επιρροή στην εξέλιξη της επιστήμης είναι τεράστια, «οι μαθηματικοί ούτε χρειάζονται το άπειρο, ούτε το χρησιμοποιούν».

Ο Αρχιμήδης και η μέτρηση του κύκλου

Ο Αρχιμήδης υπολόγισε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου, χρησιμοποιώντας την παλαιότερη ιδέα της προσέγγισής τους από κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε αυτόν (ξεκινώντας από το κανονικό εξάγωνο). Τη βελτίωσε όμως χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες ακολουθίες.

Για το μήκος του κύκλου χρησιμοποίησε την ακολουθία: $P_n,\ p_n,\ P_{2n},\ p_{2n},\ P_{4n},\ p_{4n}, \ldots$ όπου

($1^{ος}$ όρος) P_n: η περίμετρος των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με n πλευρές

($2^{ος}$ όρος) p_n: η περίμετρος των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με n πλευρές

($3^{ος}$ όρος) $P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$: ο αρμονικός μέσος των δύο πρώτων όρων $(P_n,\ p_n)$

($4^{ος}$ όρος) $p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$: ο γεωμετρικός μέσος των δύο προηγούμενων όρων $(p_n,\ P_{2n})$

και ούτω καθεξής.

Με τον τρόπο αυτό υπολόγισε με μεγάλη προσέγγιση το μέγεθος του π,

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Εναλλακτικά χρησιμοποιείται η ακολουθία των εμβαδών: $\alpha_n,\ A_n,\ \alpha_{2n},\ A_{2n}, \ldots$ όπου

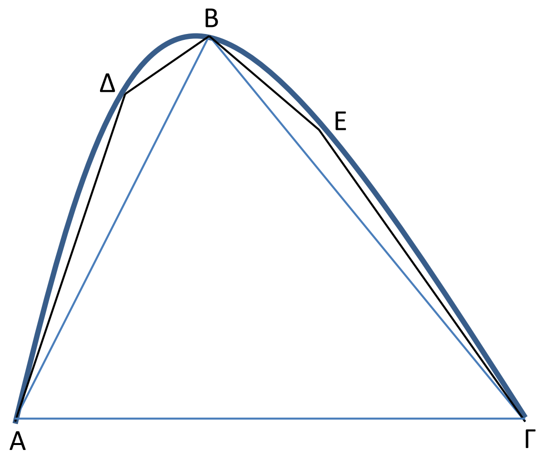
($1^{ος}$ όρος) a_n: το εμβαδόν των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με n πλευρές

($2^{ος}$ όρος) A_n: το εμβαδόν των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με n πλευρές

($3^{ος}$ όρος) $\alpha_{2n} = \sqrt{\alpha_nA_n}$: ο γεωμετρικός μέσος των δύο πρώτων όρων $(\alpha_n,\ A_n)$

($4^{ος}$ όρος) $A_{2n} = \frac{2A_n\alpha_{2n}}{A_n+\alpha_{2n}}$: ο αρμονικός μέσος των δύο προηγούμενων όρων $(A_n,\ \alpha_{2n})$, κ.ο.κ.

Ο Αρχιμήδης και η εύρεση του εμβαδού παραβολοειδούς τμήματος



Έστω Κ η επιφάνεια του παραβολοειδούς ΑΔΒΕΓ και Τ η επιφάνεια του τριγώνου ΑΒΓ

Ο Αρχιμήδης απέδειξε με τη μέθοδο εξάντλησης ότι $K = \frac{4}{3}T$

__Αξίωμα (λήμμα) του Αρχιμήδη__: **"Δεδομένων δύο άνισων εμβαδών, το διπλάσιο της διαφοράς τους μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από οποιαδήποτε δεδομένη επιφάνεια"**

Στη συνέχεια απέδειξε εκ νέου τον ίδιο τύπο, χρησιμοποιώντας μία διαδικασία που έμοιαζε με την ακόλουθη:

(ΑΒΓ) = 4·(το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στην παραβολή τριγώνου με βάση την ΑΒ + το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στην παραβολή τριγώνου με βάση την ΒΓ)

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, απέδειξε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας $K = T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \cdots$

$\Rightarrow K = T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots\right) \overset{(*)}{\Rightarrow} K = \frac{4}{3}\,T$

(*) γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$, λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$, $|\lambda| < 1$

Επομένως το άθροισμα των άπειρων όρων της σειράς είναι $S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{4}{3}$

Ο Αρχιμήδης δεν αναφέρθηκε στο άθροισμα της απειροσειράς, γιατί στην εποχή του δεν έβλεπαν με καλό μάτι τις άπειρες διαδικασίες. Αντίθετα, απέδειξε με διπλή απαγωγή σε άτοπο, ότι η τιμή του Κ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη ούτε μικρότερη του $\frac{4}{3}\,T$. Με το αξίωμά του ο Αρχιμήδης αποκλείει στην ουσία το σταθερό απειροστό ή αδιαίρετο που συζητιόταν τόσο πολύ την εποχή του Πλάτωνα.

Ο Αρχιμήδης υπολόγισε ακόμα το εμβαδόν της έλλειψης, ως το εμβαδόν ενός κύκλου, του οποίου η ακτίνα ισούται με το γεωμετρικό μέσο των ημιαξόνων της έλλειψης, δηλαδή

$$c\colon\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \ \text{ και } E=\pi\cdot\alpha\cdot\beta$$

Απέδειξε επίσης ότι ο όγκος του κυλίνδρου ισούται με το διπλάσιο του όγκου του κωνοειδούς τμήματος. Η διαδικασία αυτή διαφέρει από τις σύγχρονες του ολοκληρωτικού λογισμού, κυρίως ως προς την έννοια του ορίου συνάρτησης. Ο μόνος που πλησίασε τόσο κοντά ήταν ο Αρχιμήδης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ξεκινώντας με ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο, να χρησιμοποιήσετε έναν αναδρομικό αλγόριθμο του Αρχιμήδη για να υπολογίσετε τα p_{12} και P_{12} ή τα α_{12} και A_{12}. Ποια είναι η τιμή του $\boldsymbol{\pi}$ που προτείνει ο αριθμητικός μέσος των απαντήσεών σας;

2. Να αναζητήσετε τα Αρχιμήδεια στερεά και τα Πλατωνικά στερεά.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4η

Τα Μαθηματικά στην Ευρώπη στα μεσαιωνικά χρόνια

Η ακολουθία του Fibonacci

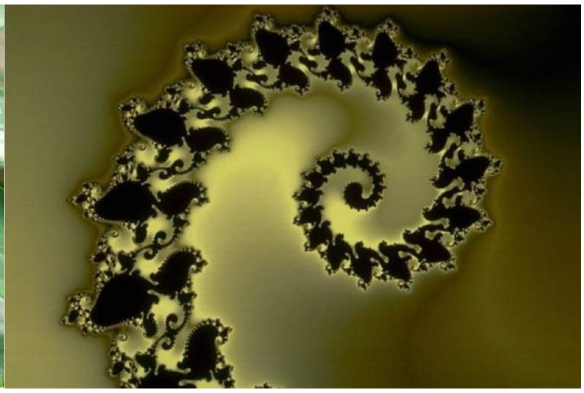
Το 1202 εκδόθηκε ένα διάσημο όσο και κλασικό βιβλίο του Fibonacci (1180 – 1250), μέσα στο οποίο υπήρχαν ορισμένα προβλήματα τα οποία ενέπνευσαν πολλούς από τους μεταγενέστερους μαθηματικούς. Το σημαντικότερο ενδεχομένως ήταν το εξής:

Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα έχουμε σε ένα χρόνο, αν ξεκινήσουμε με ένα ζευγάρι, αν κάθε μήνα το κάθε ζευγάρι γεννά ένα καινούργιο ζευγάρι το οποίο αρχίζει να αποκτά δικούς του απογόνους από το δεύτερο μήνα και μετά;

Το διάσημο αυτό πρόβλημα σχηματίζει την “ακολουθία Fibonacci” 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, u_n, …

Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι: $u_1 = u_2 = 1$ και $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 3$

Η ακολουθία του Fibonacci έχει σημαντικές ιδιότητες, όπως ότι κάθε ζευγάρι διαδοχικών όρων της είναι πρώτοι μεταξύ τους και ότι το $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (η χρυσή τομή). Η ακολουθία αυτή βρίσκει επίσης εφαρμογές σε ζητήματα που αναφέρονται στα φύλλα των δένδρων, στην οργανική ανάπτυξη, κ.λπ.

Οι απειροσειρές (14ος αιώνας)

Το 14ο αιώνα στην Αγγλία ο Richard Suiseth (γνωστός ως Calculator), που ασχολούνταν με τη λογική, έλυσε το παρακάτω πρόβλημα στο *πλάτος των μορφών* (το αντίστοιχο της γραφικής παράστασης συναρτήσεων)

Αν κατά το πρώτο ήμισυ ενός δεδομένου χρονικού διαστήματος μία μεταβολή συνεχίζεται με μια συγκεκριμένη ένταση, κατά το επόμενο τέταρτο του διαστήματος με τη διπλή ένταση, κατά το επόμενο όγδοο με την τριπλή ένταση και ούτω καθεξής, τότε η μέση ένταση για όλο το χρονικό διάστημα θα είναι η ένταση της μεταβολής κατά τη δεύτερη υποδιαίρεση του διαστήματος (ή δύο φορές την αρχική ένταση)

Το παραπάνω με σύγχρονη ορολογία ισοδυναμεί με το να πούμε ότι το άθροισμα της απειροσειράς

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots \text{ ισούται με το } 2$$

Ο επίσκοπος Nicole Oresme (1323; – 1382) απέδειξε το θεώρημα και ασχολήθηκε και με άλλες περιπτώσεις, όπως με τη σειρά $\frac{1\cdot 3}{4}+\frac{2\cdot 3}{16}+\frac{3\cdot 3}{64}+\cdots+\frac{3\cdot n}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}$

Επιπλέον απέδειξε, η πρώτη απόδειξη στην ιστορία των μαθηματικών, ότι η αρμονική σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \text{ αποκλίνει}$$

<u>Απόδειξη</u>

Ομαδοποίησε τους διαδοχικούς όρους της σειράς, τοποθετώντας τον πρώτο όρο στην πρώτη ομάδα, τους επόμενους δύο στη δεύτερη ομάδα, τους επόμενους τέσσερις στην τρίτη κ.ο.κ. Δηλαδή

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

↓ ↓ ↓ ↓

1η 2η 3η … … … m – οστή ομάδα

ένας δύο τέσσερις … … … 2^{m-1} όροι

Είναι προφανές ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ομάδων και ότι το άθροισμα των όρων κάθε ομάδας είναι $\geq \frac{1}{2}$. Επομένως, μπορούμε να υπερβούμε οποιονδήποτε δεδομένο αριθμό, αν προσθέσουμε όσους όρους απαιτούνται!

Βασικές γνώσεις θεωρίας:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1:

1. Αν $\{\alpha_n\}$ μια δεδομένη ακολουθία και s_n ορίζεται από την

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ ονομάζεται *άπειρη σειρά.*

2. Συνήθως αντί για $\{s_n\}$ γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ή $\sum a_n$

3. Ο αριθμός $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ονομάζεται το *n – οστό μερικό άθροισμα* της σειράς $\sum a_k$

4. Ο αριθμός a_n ονομάζεται *n – οστός όρος* της σειράς (και της αρχικής ακολουθίας)

5. Η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει σε έναν αριθμό L αν και μόνο αν ισχύει

$$L = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Τότε το L ονομάζεται *άθροισμα* της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad \text{ή} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots = L$$

Αν δεν υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός, τότε λέμε ότι η σειρά *αποκλίνει*

Παράδειγμα:

Μία μέθοδος εύρεσης του αθροίσματος μιας άπειρης σειράς με τον περιοδικό δεκαδικό

$$0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

$s_1 = \frac{3}{10}$

$s_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}$

$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n}$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) με $\frac{1}{10}$ και έχουμε

$\frac{1}{10} s_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}}$ (2)

Αφαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε

$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \Leftrightarrow s_n = \frac{3}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

Καθώς το $n \to \infty$, το $\left(\frac{1}{10}\right)^n \to 0$ και

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Επομένως το άθροισμα της άπειρης σειράς $\frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$ είναι $\frac{1}{3}$ και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$$

Ο δεκαδικός 0,333 ... είναι ειδική περίπτωση μιας γεωμετρικής σειράς

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2:</u>

Μια σειρά της μορφής: $\alpha + \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \alpha\lambda^3 + \cdots + \alpha\lambda^{n-1} + \cdots$ (1), ονομάζεται *γεωμετρική* με λόγο κάθε όρου προς τον προηγούμενο ίσο με λ.

Το άθροισμα των n – πρώτων όρων της (1) είναι $s_n = \alpha + \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \alpha\lambda^3 + \cdots + \alpha\lambda^{n-1}$

Αποδεικνύεται ότι: $s_n = \begin{cases} \frac{\alpha\,(1-\lambda^n)}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1 \\ n\alpha, & \lambda = 1 \end{cases}$ (2)

Θεώρημα γεωμετρικής σειράς:

Αν λ = 1 η (1) δεν έχει πεπερασμένο όριο (εκτός αν α = 0, οπότε συγκλίνει στο 0).

Αν $\lambda \neq 1$, τότε καθώς το $n \to \infty$ το $\lambda^n \to 0$ όταν $|\lambda| < 1$ και η γεωμετρική σειρά συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\alpha}{1-\lambda}$.

Για λ = 0 η σειρά συγκλίνει στο α.

Αν $|\lambda| > 1$, τότε $|\lambda^n| \to \infty$ με αποτέλεσμα η (1) να αποκλίνει

Αν λ = – 1 η (1) αποκλίνει (εκτός αν α = 0, οπότε συγκλίνει στο 0).

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{u_{12}}{u_{13}}$ στην ακολουθία Fibonacci. Μέχρι πόσα σημαντικά ψηφία συμφωνεί ο λόγος με το λόγο της χρυσής τομής;

2. Με τη μέθοδο του Oresme να αποδείξετε ότι η σειρά $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$ αποκλίνει

3. Να επαληθεύσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ κατά τον Calculator

4. Να επαληθεύσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4^n}$ κατά τον Oresme

5. Να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$, βρίσκοντας το όριο του μερικού αθροίσματος (μικτή πρόοδος)

6. Να υπολογισθούν τα παρακάτω αθροίσματα με τη μέθοδο των διαφορών:

$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $iii)\ \frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\cdots$

7. Να αποδείξετε τη σχέση (2), χρησιμοποιώντας μέθοδο αντίστοιχη με του παραδείγματος που αναφέρεται στο δεκαδικό 0,333…

8. α) Μια μπάλα αφήνεται να πέσει από ύψος 6 μέτρων πάνω σε μία επίπεδη επιφάνεια. Κάθε φορά που προσκρούει στην επιφάνεια (αφού πέσει από ύψος h) αναπηδά κατά μια απόσταση ίση με $\frac{2}{3}h$. Να υπολογίσετε το ολικό διάστημα που θα διανύσει η μπάλα (απάντηση: 30m)

β) Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης της μπάλας (υπόδειξη: $s=\frac{1}{2}gt^2$, όπου s (m), t(sec))

9. α) Δίνεται ένα τετράγωνο με πλευρά α. Ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του σχηματίζοντας ένα καινούργιο τετράγωνο εσωτερικό του αρχικού. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή άπειρες φορές. Να υπολογίσετε τα άθροισμα των πλευρών όλων των τετραγώνων, καθώς επίσης και το άθροισμα των περιμέτρων και των εμβαδών τους. Εφαρμογή για α = 4.

β) Να κάνετε το ίδιο ξεκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.

γ) Δίνεται κύκλος $c_1(K,R)$. Σχηματίζουμε ομόκεντρους κύκλους $c_2\left(K,\ \frac{R}{2}\right), c_3\left(K,\ \frac{R}{4}\right)$ κ.ο.κ. με τη λογική κάθε επόμενος να είναι ομόκεντρος του προηγούμενου του και να έχει τη μισή ακτίνα από αυτόν. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των απείρων κύκλων που σχηματίζονται.

10. α) Να εκφράσετε τον περιοδικό δεκαδικό 0,15 15 15 … ως μία άπειρη σειρά και να δώσετε το άθροισμα ως λόγο p/q δύο ακεραίων.

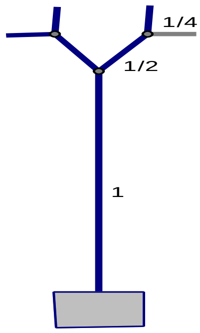
β) Είναι σωστό ή λάθος ότι κάθε περιοδικός δεκαδικός είναι ένας ρητός αριθμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

11. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς $0,\overline{9}$ και $1,\overline{0}$. Τι παρατηρείτε;

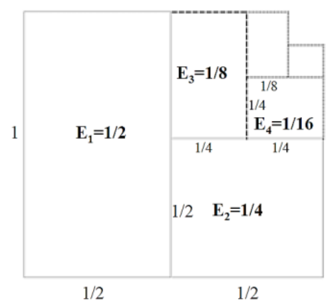
12. Το "απειρόδενδρο" είναι ένα φυτό εσωτερικού χώρου που αναπτύσσεται ιδιόμορφα. Την $1^η$ ημέρα υψώνεται κατά 1m. Τη $2^η$ ημέρα αναπτύσσονται δύο νέα κλαδιά, μήκους $\frac{1}{2}\,m$ το καθένα, κάθετα μεταξύ τους. Την επόμενη ημέρα εμφανίζονται σε κάθε άκρο δύο νέα κλαδιά, κάθετα μεταξύ τους και μισά σε μήκος από τα κλαδιά που είχαν εμφανισθεί την προηγούμενη ημέρα (δηλαδή μήκους $\frac{1}{4}\,m$ το καθένα) και αυτό συνεχίζεται καθημερινά (βλ. σχήμα). Είναι δυνατό ένα τέτοιο δένδρο να χωρέσει στο σαλόνι ενός σπιτιού, χωρίς να εμποδίζεται η ανάπτυξη του λόγω έλλειψης χώρου;

(Υπόδειξη: να ελέγξετε την καθ' ύψος, κατά πλάτος και κατά "βάθος" ανάπτυξη του φυτού.

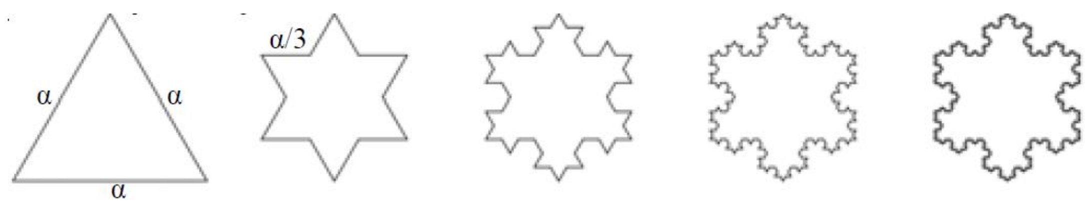
Απάντηση: S ύψους < 2m, S πλάτους < 2m, S βάθους < 1m)



13. Δίνεται ένα τετράγωνο με πλευρά α = 1, το οποίο χωρίζουμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να σχολιάσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, την έκφραση: **Άπειρη Συμπλήρωση Τετραγώνου** (το εμβαδόν ενός τετραγώνου αποτελείται από το άθροισμα άπειρων εμβαδών σχημάτων)



14. Οι νιφάδες του Koch. Ξεκινάμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ***α***. Από κάθε πλευρά αφαιρούμε το 1/3 της και κατασκευάζουμε ένα αστέρι με πλευρά ***α/3***. Με την ίδια διαδικασία συνεχίζουμε να κατασκευάζουμε σχήματα, όπως φαίνεται παρακάτω.



Να σχολιάσετε την έκφραση: **Γραμμή άπειρου μήκους περικλείει πεπερασμένο εμβαδό**

(Απάντηση: $S_\infty = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$, $l_\infty = 3a\left(1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots\right) = \infty$)

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 5η</u>

Τα Μαθηματικά στην περίοδο της Αναγέννησης. Προοίμιο των σύγχρονων Μαθηματικών

Ο Francois Viete (Fransiscus Vieta, 1540 – 1603)

Πριν τον Vieta υπήρξαν πολλές καλές και λιγότερο καλές προσεγγίσεις του $\boldsymbol{\pi}$, δηλαδή του λόγου του μήκους προς τη διάμετρο ενός κύκλου. Ο Vieta ήταν ο πρώτος που παρουσίασε τη θεωρητικά ακριβή αριθμητική τιμή του $\boldsymbol{\pi}$, με ένα απειρογινόμενο της μορφής:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Η ιδέα είναι η εξής: εγγράφουμε ένα τετράγωνο σε έναν κύκλο και εφαρμόζουμε τον αναδρομικό τύπο $a_{2n} = a_n\, τεμ\frac{\pi}{n}$[1], όπου a_n είναι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου n πλευρών, και τέλος επιτρέπουμε στο n να αυξηθεί απεριόριστα.

Η σπουδαιότητα του επιτεύγματος, της έκφρασης του $\boldsymbol{\pi}$ αναλυτικά, έγκειται στο γεγονός ότι τα αλγεβρικά και τριγωνομετρικά σύμβολα κυρίευαν σιγά – σιγά το χώρο του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού, ένα χώρο στον οποίο έως τότε κυριαρχούσε η γεωμετρική προσέγγιση.

Ο Johann Kepler (1571 – 1630)

Ο Kepler το 1604 ανέπτυξε την ιδέα για την αρχή της συνέχειας των κωνικών τομών:

Η αφετηρία είναι η κωνική τομή, που αποτελείται από ***δύο τεμνόμενες ευθείες***, στην οποία οι δύο εστίες συμπίπτουν στο σημείο τομής. Στη συνέχεια, περνάμε σταδιακά μέσα από απείρως πολλές ***υπερβολές*** καθώς η μία εστία απομακρύνεται όλο και περισσότερο από την άλλη. Όταν η μία εστία βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από την άλλη, δεν υπάρχει πλέον η υπερβολή με τους δύο κλάδους της, αλλά η ***παραβολή***. Καθώς η κινούμενη εστία "περνά" το άπειρο και πλησιάζει πάλι από την άλλη πλευρά, περνάμε σε μία σειρά από απείρως πολλές ***ελλείψεις*** έως ότου, όταν οι δύο εστίες συμπέσουν, να καταλήξουμε στον ***κύκλο***.

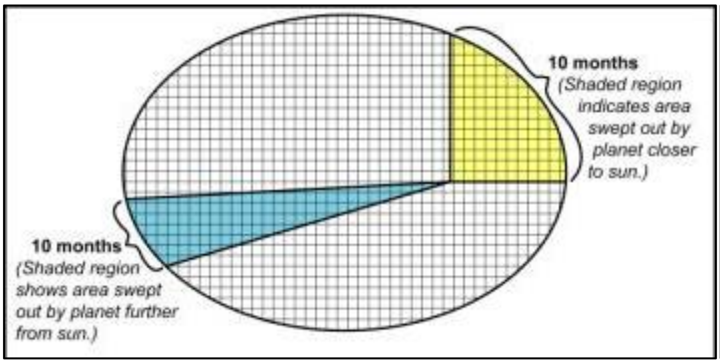
Το 1609 ο Kepler ανακοίνωσε τους δύο πρώτους του νόμους για την αστρονομία:

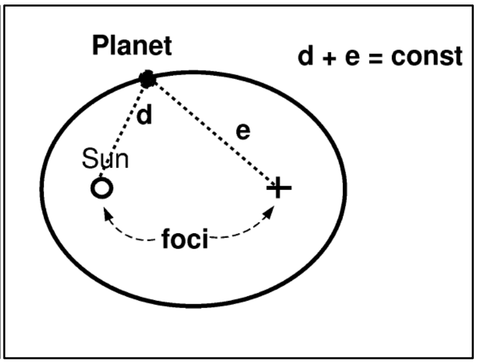
1. Οι πλανήτες κινούνται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτικές τροχιές, με τον ήλιο στη μία εστία

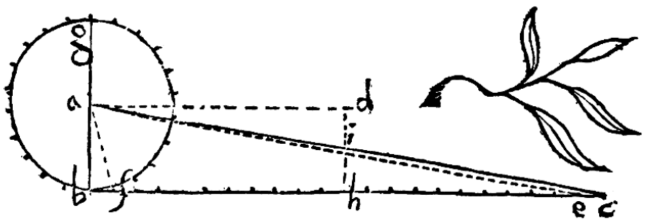
2. Το ακτινικό διάστημα που ενώνει έναν πλανήτη με τον ήλιο, "σαρώνει" ίσα εμβαδά σε ίσα χρονικά διαστήματα. Για να αντιμετωπίσει τέτοια προβλήματα εμβαδού, ο Kepler θεώρησε την επιφάνεια ως αποτελούμενη από απείρως μικρά τρίγωνα με τη μία κορυφή τους στον ήλιο και τις άλλες δύο σε σημεία, απείρως κοντινά, επάνω στην τροχιά.

---

[1] $τεμθ = \frac{1}{συνθ}$, όπου $συνθ \neq 0$





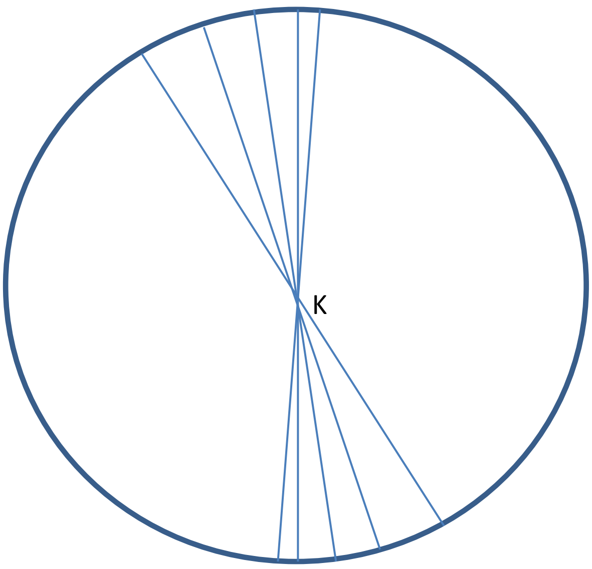


The area of the circle seen by Kepler 1615

Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε, για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός κύκλου (βλ. σχήμα), θεωρώντας ότι τα ύψη των απείρως λεπτών τριγώνων ισούνται με την ακτίνα. Αν ονομάσουμε τις απείρως μικρές βάσεις που βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, τότε το εμβαδόν του κύκλου, που ισοδυναμεί με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων, θα είναι:

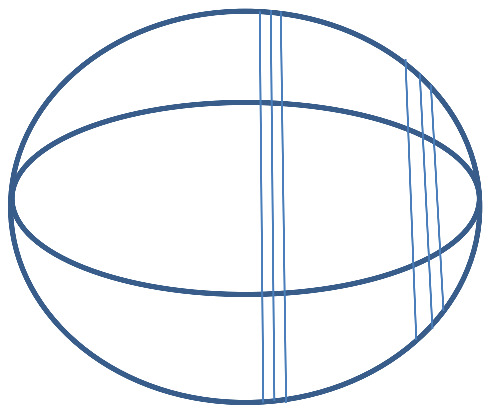
$$E = \frac{1}{2}b_1r_1 + \frac{1}{2}b_2r_2 + \cdots + \frac{1}{2}b_nr_n + \cdots = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots)$$

Εφόσον το άθροισμα των b_i είναι η περιφέρεια C, το εμβαδόν E θα δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}rC$, το γνωστό αρχαίο θεώρημα που είχε αποδείξει με μεγαλύτερη προσοχή ο Αρχιμήδης.

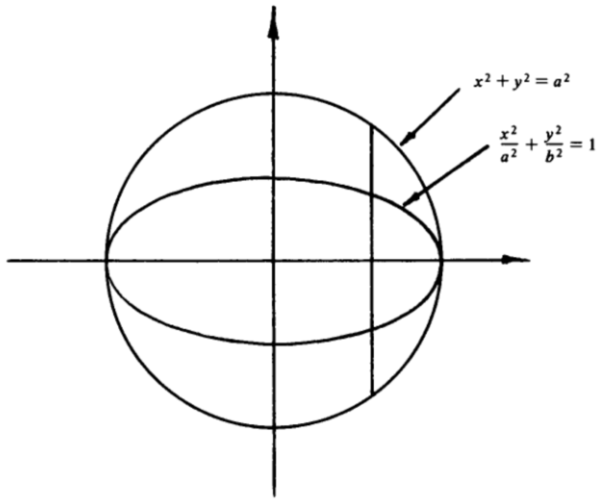


Με ανάλογο τρόπο ο Kepler υπολόγισε το εμβαδόν της έλλειψης, ένα αποτέλεσμα του Αρχιμήδη, που δεν διασωζόταν.

Η έλλειψη προκύπτει από έναν κύκλο ακτίνας α μέσω ενός μετασχηματισμού κατά τον οποίο, η τεταγμένη κάθε σημείου του κύκλου μικραίνει σύμφωνα με ένα δεδομένο λόγο , έστω b:α. Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη μέθοδο του Oresme, μπορούμε να θεωρήσουμε το εμβαδόν της έλλειψης και το εμβαδόν του κύκλου ως αποτελούμενα από όλες τις τεταγμένες των σημείων των σχημάτων (βλ. σχήμα δίπλα).



Εφόσον όμως ο λόγος των συνιστωσών των εμβαδών είναι b:α, τον ίδιο λόγο θα έχουν και τα ίδια τα εμβαδά. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\alpha^2$, κατά συνέπεια το εμβαδόν της έλλειψης[2] πρέπει να είναι $\pi\alpha b$. Το καλύτερο που μπόρεσε να κάνει όμως ο Kepler για την περιφέρεια της έλλειψης ήταν να δώσει τον προσεγγιστικό τύπο $\pi(a+b)$.Ο υπολογισμός του μήκους της έλλειψης ειδικά, αλλά και των καμπυλών γενικά, θα διέφευγαν των μαθηματικών για μισό ακόμη αιώνα.



[2] Εξίσωση έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{b^2} = 1$

Ο Γαλιλαίος και το Άπειρο

O Galileo Galilei (1564 – 1642) στο έργο του ασχολήθηκε πολλές φορές με την έννοια του απείρου. Ένα παράδειγμα από τη γεωμετρία είναι το ακόλουθο:

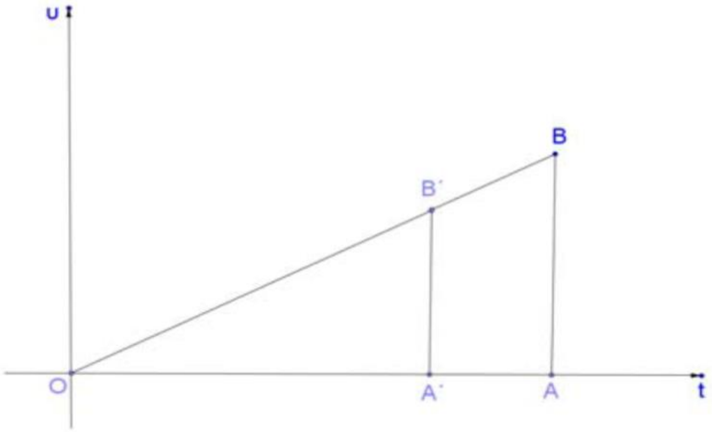
Θεωρεί ότι είναι το ίδιο εύκολο να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε έναν άπειρο αριθμό τμημάτων, όσο το να χωρισθεί μία ευθεία σε πεπερασμένα τμήματα. Καταρχάς, δε χρειάζεται να χωρισθούν τα τμήματα, αλλά απλά να σημειωθούν τα σημεία διαχωρισμού. Αν, για παράδειγμα, λυγίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα έτσι ώστε να σχηματισθεί ένα τετράγωνο ή ένα κανονικό οκτάγωνο, τότε το ευθύγραμμο τμήμα έχει χωρισθεί αντίστοιχα σε τέσσερα ή σε οκτώ ίσα τμήματα. Στη συνέχεια υποστηρίζει ότι αν λυγίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα και σχηματίσουμε έναν κύκλο "αποδεικνύουμε στην πραγματικότητα ότι ο άπειρος αριθμός των τμημάτων που υποστηρίζαμε ότι υπήρχε όταν ήταν ευθύ, υπήρχε σε αυτό δυνητικά", γιατί ο κύκλος είναι ένα πολύγωνο με άπειρο αριθμό πλευρών.
Ο Γαλιλαίος είχε όμως και την άποψη: ότι τα άπειρα και τα αδιαίρετα ξεπερνούν την πεπερασμένη κατανόηση μας. Τα πρώτα εξαιτίας του μεγέθους τους και τα δεύτερα εξαιτίας της μικρότητάς τους. Φανταστείτε τι συμβαίνει όταν συνδυάζονται.

Ένα ακόμη παράδειγμα από την αριθμητική είναι το ακόλουθο:

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα τους ακέραιους με τα τέλεια τετράγωνα παρά το γεγονός ότι, όσο προχωρά κανείς στην ακολουθία των ακεραίων, τόσο πιο σπάνια συναντά τέλεια τετράγωνα. Αν κάνουμε το απλό τέχνασμα και μετρήσουμε τους τέλειους αριθμούς, ορίζουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία στην οποία κάθε ακέραιος ζευγαρώνει με ένα τέλειο τετράγωνο και αντίστροφα. Μολονότι υπάρχουν πολλοί ακέραιοι οι οποίοι δεν είναι τέλεια τετράγωνα (και η αναλογία τους αυξάνει καθώς θεωρούμε όλο και μεγαλύτερους αριθμούς), *"πρέπει να πούμε ότι υπάρχουν τόσα τετράγωνα όσοι και αριθμοί"*. Έτσι ο Γαλιλαίος βρέθηκε αντιμέτωπος με τη βασική ιδιότητα του απειροσυνόλου – ότι ένα μέρος του συνόλου μπορεί να ισούται με όλο το σύνολο – αλλά δεν κατέληξε σε αυτήν την πρόταση. Αντίθετα, συμπέρανε ότι τα "χαρακτηριστικά", "ίσο", "μεγαλύτερο" και "μικρότερο", δεν έχουν σχέση με το άπειρο αλλά μόνο με πεπερασμένα μεγέθη. Υποστήριξε, ακόμη, (λανθασμένα όπως πλέον γνωρίζουμε σήμερα) ότι δεν μπορούμε να πούμε ότι ένας άπειρος αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο άπειρο αριθμό ή ότι ένας άπειρος αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν πεπερασμένο.

Ο Γαλιλαίος ασχολείται συστηματικά με τις έννοιες του απείρου, του απειροστού και του αδιαίρετου, πολλές από τις ιδιότητες των οποίων μελετά και διατυπώνει στο έργο του "*Δύο νέες επιστήμες"* το 1638.

Κατά τη μελέτη της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, παρατηρεί ότι το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη ταχύτητας – χρόνου ισούται με το διάστημα που έχει διανυθεί.
Θεωρεί ένα κινητό που κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα $v = 32t$.



Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ταχύτητας - χρόνου ισούται με το διανυθέν διάστημα

Παρατηρεί ότι κάθε γραμμή Α΄Β΄ εκφράζει τη στιγμιαία ταχύτητα σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (βλ. σχήμα). Ταυτόχρονα όμως θεωρεί τη γραμμή Α΄Β΄ ως μια απειροστή απόσταση που διανύεται αν πολλαπλασιαστεί με ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι μπορεί να θεωρήσει ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ παράγεται από το άθροισμα των γραμμών Α΄Β΄. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ολική διανυθείσα απόσταση ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου.
Τώρα αφού $v = AB = 32t$ και $OA = t$, για το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ θα ισχύει:

$$(OAB) = \frac{1}{2}\,(OA)(OB) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 32t = 16\,t^2$$

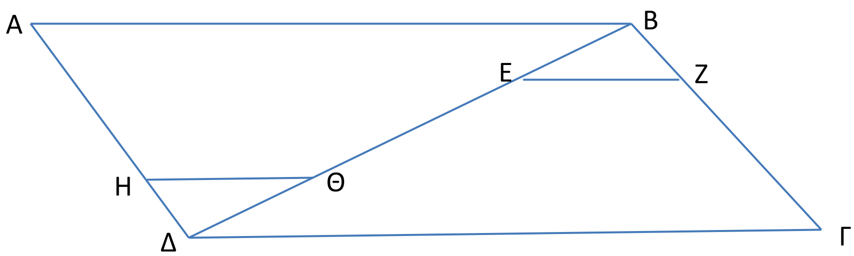
Η απόδειξη αυτή του Γαλιλαίου στηρίζεται στην αντίστοιχη απόδειξη που έχει κάνει για το ίδιο πρόβλημα ο Nicole Oresme

O Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647)

Ο Γαλιλαίος σκόπευε να γράψει μια μελέτη για το άπειρο στα μαθηματικά, η οποία όμως δεν βρέθηκε. Έτσι παρότρυνε το μαθητή του Cavalieri να οργανώσει τις σκέψεις του για τα απειροστά και να γράψει ένα βιβλίο. Έτσι προέκυψε ένα από τα πιο σημαντικά βιβλία των αρχών της σύγχρονης περιόδου, η *Geometria indivisibilibus continuorun,* που κυκλοφόρησε το 1635 (*)

Συνοπτικά λοιπόν, ο Cavalieri βασίστηκε στο επιχείρημα ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα εμβαδόν αποτελείται από ευθείες ή "αδιαίρετα" (απείρως μικρά σε μέγεθος) και αντίστοιχα ένας στερεός όγκος από εμβαδά που είναι "αδιαίρετα". Είναι προφανές ότι στηριζόταν ουσιαστικά σε όσα υπονοούν τα έργα των Oresme, Kepler και Γαλιλαίου και χρησιμοποιούσε το είδος της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης στην χαμένη τότε *Μέθοδο*.
Η γενική προσέγγιση της μεθόδου των αδιαίρετων φαίνεται καθαρά από την ακόλουθη πρόταση, που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως θεώρημα του Cavalieri:
Αν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη και αν οι τομές, που σχηματίζουν επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις και σε ίσες αποστάσεις από αυτές, σχηματίζουν ένα δεδομένο λόγο, τότε οι όγκοι των στερεών σχηματίζουν και αυτοί τον ίδιο λόγο
Ο Cavalieri είχε καταλήξει στη μέθοδό του το 1626 και συγκέντρωσε την προσοχή του σε ένα ιδιαίτερα χρήσιμο γεωμετρικό θεώρημα, ισοδύναμο με τη σύγχρονη πρόταση του απειροστικού λογισμού: $\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$

Ο Cavalieri λοιπόν, σύγκρινε τις δυνάμεις των ευθύγραμμων τμημάτων των παράλληλων στη βάση ενός παραλληλόγραμμου με τις αντίστοιχες δυνάμεις ευθύγραμμων τμημάτων σε ένα από τα δύο τρίγωνα στα οποία διαιρεί η διαγώνιος το παραλληλόγραμμο.



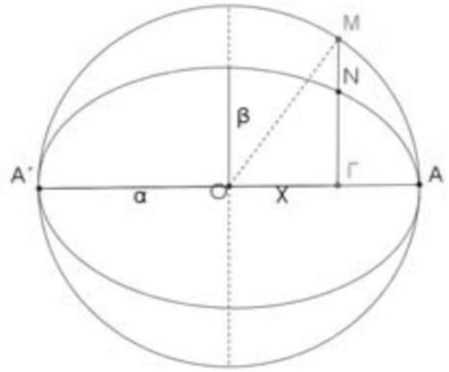
Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ διαιρείται σε δύο τρίγωνα από τη διαγώνιο ΒΔ. Θεωρούμε την ΕΖ ως μία αδιαίρετο του τριγώνου ΒΔΓ, η οποία είναι παράλληλη προς τη βάση ΔΓ. Στη συνέχεια αν θεωρήσουμε την ΔΗ = ΒΖ και φέρουμε την ΗΘ//ΔΓ, εύκολα αποδεικνύεται ότι η αδιαίρετος ΗΘ του τριγώνου ΑΒΔ θα είναι ίση με την ΕΖ. Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε όλες τις αδιαίρετες του τριγώνου ΒΓΔ με τις ίσες αδιαίρετες του τριγώνου ΑΒΔ, και επομένως, τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Εφόσον το παραλληλόγραμμο είναι το άθροισμα των αδιαίρετων των δύο τριγώνων, είναι σαφές ότι το άθροισμα των πρώτων δυνάμεων των ευθύγραμμων τμημάτων σε ένα από τα δύο τρίγωνα ισούται με το μισό του αθροίσματος των πρώτων δυνάμεων των ευθειών του παραλληλόγραμμου, δηλαδή με όρους του απειροστικού λογισμού,

$$\int_0^{\alpha} x dx = \frac{a^2}{2}$$

(*) <u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Αναλυτικά η θεωρία του Cavallieri

Ο Cavalieri αναπτύσσει τη θεωρία των "αδιαίρετων", τα οποία είχε ήδη χρησιμοποιήσει ο Γαλιλαίος στη Φυσική. Σε κανένα σημείο του έργου του δεν ορίζει ο Cavalieri το αδιαίρετο. Απλά χρησιμοποιεί τον όρο "αδιαίρετα" για να χαρακτηρίσει τα απειροστά στοιχεία που χρησιμοποιεί στη μέθοδό του. Κάθε αδιαίρετο με την κίνησή του παράγει το επόμενο ανώτερης διάστασης συνεχές. Έτσι το σημείο κινούμενο δημιουργεί μια γραμμή. Μια γραμμή κινούμενη παράγει ένα επίπεδο και ένα επίπεδο με την κίνησή του παράγει ένα στερεό. Συνεπώς το επίπεδο απαρτίζεται από ένα άπειρο πλήθος παράλληλων γραμμών που ισαπέχουν μεταξύ τους, και το στερεό από ένα άπειρο πλήθος ισαπεχόντων παράλληλων επιπέδων. Έτσι, κατά τον Cavalieri το εμβαδόν αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό ισαπεχόντων ευθύγραμμων τμημάτων και ο όγκος από ένα άπειρο πλήθος ισαπεχόντων παράλληλων επιπέδων. Δηλαδή το σημείο είναι το αδιαίρετο της γραμμής, η γραμμή είναι το αδιαίρετο του επιπέδου και το επίπεδο είναι το αδιαίρετο του στερεού σχήματος. Αυτό που δεν ξεκαθαρίζει ο Cavalieri είναι αν το αδιαίρετο έχει πάχος. Το στοιχείο που τον διαφοροποιεί από τους προηγούμενους είναι η θεώρηση ότι ***τα μεγέθη δεν διασπώνται σε απειροστά αλλά παράγονται μέσα από την κίνηση των αδιαιρέτων***. Ο Kepler θεωρούσε ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα συντίθεται από απειροστά της ίδιας διάστασης. Ο Cavalieri θεωρεί ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα παράγεται από την κίνηση αδιαιρέτων της προηγούμενης διάστασης.

Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο της θεώρησης του Cavalieri είναι η εισαγωγή της έννοιας "*όλων των γραμμών"* (omnes lineae). Αν C είναι για παράδειγμα ένα επίπεδο σχήμα και (ε) μια ευθεία οδηγός που καθορίζει μια διεύθυνση στο επίπεδο του σχήματος, θεωρεί δυο επίπεδα παράλληλα προς την (ε) που τέμνουν το επίπεδο του σχήματος C (συνήθως κάθετα σε αυτό).
Στη συνέχεια θεωρεί ότι το ένα από τα δυο επίπεδα κινείται παράλληλα προς τον εαυτό του μέχρι να συμπέσει με το δεύτερο. Οι τομές του επιπέδου αυτό με το C είναι αυτό που ο Cavalieri ονομάζει "*όλες οι γραμμές"* ως προς τη διεύθυνση της (ε).
Χρησιμοποιώντας αυτά τα στοιχεία στο έργο του *Geometria indivisibilibus Continuorum nova quadam ratione promota* διατυπώνει και επιχειρεί να αποδείξει την αρχή "*Αν δύο επίπεδα εμβαδά είναι τέτοια ώστε κάθε παράλληλη προς μια σταθερή κατεύθυνση, τέμνει τα δυο σχήματα σε ευθύγραμμα τμήματα το μήκος των οποίων βρίσκεται σε σταθερή σχέση λόγου, τότε και τα δυο εμβαδά βρίσκονται στην ίδια σχέση λόγου"*, αλλά και μια ανάλογή της για όγκους. Σε απόδοση στα σύγχρονα μαθηματικά η πρόταση αυτή είναι:
(i) Αν δύο επίπεδα σχήματα με ίσα ύψη περιέχονται μεταξύ δύο παραλλήλων γραμμών και φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις αρχικές ώστε να τέμνουν τα επίπεδα σχήματα, τότε αν τα μήκη των ευθυγράμμων σχημάτων που κάθε ευθεία δημιουργεί στα δύο σχήματα έχουν σταθερό λόγο, τον ίδιο λόγο θα έχουν και τα εμβαδά των επιπέδων σχημάτων.
(ii) Αν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη, και αν οι τομές από επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις και σε ίσες αποστάσεις από αυτές βρίσκονται πάντα σε δοθέντα λόγο, τότε οι όγκοι των στερεών έχουν επίσης τον ίδιο λόγο.
Ένα παράδειγμα εφαρμογής της πρότασης είναι ο υπολογισμός του εμβαδού της έλλειψης. Υπολογίζει το εμβαδόν της έλλειψης με τη βοήθεια του εμβαδού κύκλου που θεωρεί γνωστό.



Υπολογισμός εμβαδού έλλειψης

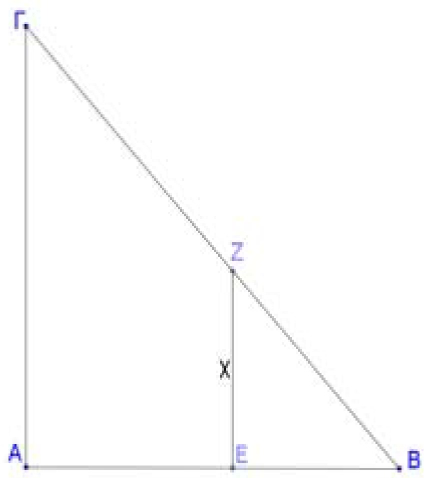
Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων σχεδιάζει την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{b^2}=1$ και τον κύκλο $x^2+\psi^2=\alpha^2$. Θεωρεί τυχαίο σημείο Μ του κύκλου (για ευκολία στους υπολογισμούς επιλέγει το Μ να βρίσκεται στο πρώτο τεταρτοκύκλιο) και φέρνει το τμήμα ΜΓ κάθετο προς την ΑΑ΄ που τέμνει την έλλειψη στο σημείο Ν. Αν $O\Gamma=x$, τότε

$$M\Gamma=\psi_M=\sqrt{\alpha^2-x^2} \text{ και } N\Gamma=\psi_N=\frac{b}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

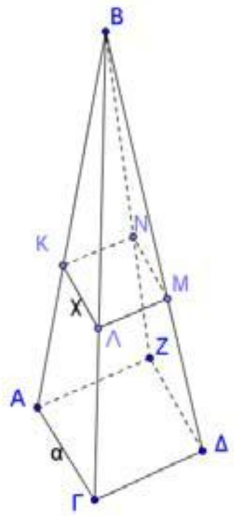
Δηλαδή ο λόγος των τεταγμένων των σημείων Μ και Ν, οπότε και ο λόγος των αντίστοιχων κάθετων χορδών, είναι $\frac{b}{\alpha}$.

Αν τώρα E και ε είναι τα εμβαδά της έλλειψης και του κύκλου αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με την παραπάνω αρχή θα ισχύει $\frac{E}{\varepsilon}=\frac{b}{\alpha}$, οπότε $E=\frac{b}{a}\,\varepsilon=\frac{b}{\alpha}\,\pi\alpha^2=\pi\alpha b$

Κάποια τελευταία παραδείγματα:



Ο υπολογισμός του $\int_0^\alpha x\,dx$



Ο υπολογισμός του $\int_0^\alpha x^2\,dx$

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 6η</u>

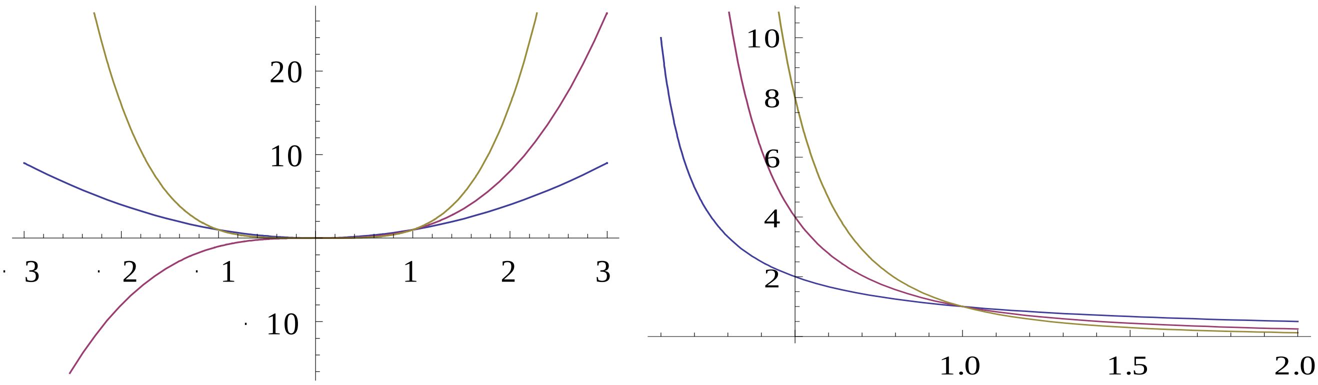
Η εποχή του Fermat

Ο Pierre de Fermat (1601 – 1665), “ο πρίγκιπας των ερασιτεχνών”, ήταν κατά τον Laplace *“ο πραγματικός εφευρέτης του διαφορικού λογισμού”*.

Οι *παραγωγίσεις* του Fermat

Ο Fermat ασχολήθηκε πολύ με γεωμετρικούς τόπους που ορίζονται από εξισώσεις της μορφής $\psi = x^n$, οι οποίες σήμερα είναι γνωστές ως “παραβολές του Fermat” αν το n είναι θετικό ή ως “υπερβολές του Fermat” αν το n είναι αρνητικό.

(για $n = 2, 3, 4$ και $n = -1, -2, -3$ οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις)



Μία από τις σημαντικότερες μελέτες του είχε τον τίτλο *Μέθοδος Εύρεσης Μεγίστων και Ελαχίστων*. Σε αυτήν παρουσίασε έναν ευφυέστατο τρόπο εύρεσης των σημείων στα οποία η συνάρτηση παρουσιάζει τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της, αναφερόμενος σε πολυωνυμικές καμπύλες της μορφής $\psi = f(x)$.

“ Σύγκρινε λοιπόν, την τιμή της $f(x)$ σε ένα σημείο με την τιμή $f(x+E)$ σε ένα γειτονικό σημείο. Κάτω από κανονικές συνθήκες οι τιμές αυτές θα είναι σαφώς διαφορετικές, αλλά στο επάνω ή στο κάτω μέρος μιας ομαλής καμπύλης η αλλαγή θα είναι σχεδόν ανεπαίσθητη. Έτσι, ο Fermat για να βρει τα μέγιστα και ελάχιστα σημεία, εξίσωσε τις τιμές $f(x)$ και $f(x+E)$, συνειδητοποιώντας ότι είναι σχεδόν ίσες μολονότι δεν είναι ακριβώς οι ίδιες. Όσο πιο μικρό είναι το διάστημα Ε ανάμεσα στα δύο σημεία, τόσο πιο πολύ πλησιάζει η ψευδοϊσότητα μια πραγματική εξίσωση. Έτσι, ο Fermat αφού διαιρεί και τα δύο μέλη με Ε, θέτει Ε = 0. Τα αποτελέσματα του έδωσαν τις τετμημένες του μέγιστου κι ελάχιστου σημείου του πολυωνύμου ”.

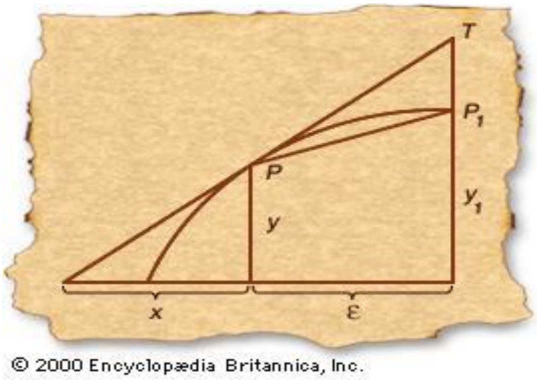
Βρισκόμαστε έτσι, μπροστά στη διαδικασία που σήμερα ονομάζουμε *παραγώγιση*, γιατί η μέθοδος του Fermat ισοδυναμεί με την εύρεση του

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

και την εξίσωσή του με το μηδέν.

Ο Fermat δε γνώριζε βέβαια την έννοια του ορίου, η μέθοδός του όμως θυμίζει αυτήν που χρησιμοποιούμε σήμερα στον απειροστικό λογισμό, αν και προτιμούμε αντί για το Ε του Fermat, το σύμβολο h ή Δx. Η διαδικασία του Fermat της αλλαγής, ελαφρά, της μεταβλητής και της θεώρησης γειτονικών τιμών αποτελεί από τότε την ουσία της απειροστικής ανάλυσης.

Σχόλιο: Η μέθοδος του Fermat για την εύρεση της εφαπτομένης καμπύλης

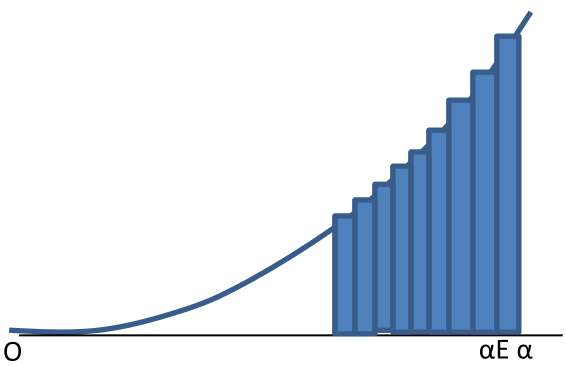


Για να βρει την εφαπτομένη στο σημείο με P (x, y), ξεκίνησε με το σχεδιασμό μιας τέμνουσας γραμμής σε ένα γειτονικό σημείο P_1 (x + ε, y_1). Για μικρές τιμές του ε, η τέμνουσα γραμμή PP_1 είναι περίπου ίση με τη γωνία PAB με την οποία η εφαπτομένη συναντά τον άξονα x. Τέλος, ο Fermat επέτρεψε στο ε να τείνει στο μηδέν, λαμβάνοντας έτσι μια μαθηματική έκφραση για την πραγματική εφαπτομένη γραμμή

Οι *ολοκληρώσεις* του Fermat

Ο Fermat γνώριζε μία μέθοδο για να βρίσκει την εφαπτομένη σε καμπύλες της μορφής $\psi = x^n$, αλλά μετά το 1629 ανακάλυψε ένα θεώρημα για τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από αυτές τις καμπύλες (το δημοσίευσε ο Cavalieri το 1635 και το 1647).

Δίδεται η καμπύλη $\psi = x^m$ (m ακέραιος, αλλά ενδεχομένως και κλασματικός) και έστω ότι ζητείται το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη από το x = 0 έως x = α. Τότε ο Fermat διαίρεσε το διάστημα από x = 0 έως x = α σε απείρως πολλά διαστήματα θεωρώντας σημεία με τετμημένες $\alpha,\ \alpha E,\ \alpha E^2,\ \alpha E^3, \dots$, όπου το E είναι μικρότερο από τη μονάδα. Στα σημεία αυτά ύψωσε τεταγμένες στην καμπύλη και στη συνέχεια προσπάθησε να προσεγγίσει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη με τη βοήθεια των ορθογωνίων (βλ. σχήμα).



Τα εμβαδά των διαδοχικών περιγεγραμμένων ορθογωνίων, ξεκινώντας από το μεγαλύτερο, δίνονται από τους όρους της γεωμετρικής προόδου:

$a^n(a-aE),\ a^nE^n(aE-aE^2),\ a^nE^{2n}(aE^2-aE^3),\ \cdots,$

Το άθροισμα των άπειρων όρων αυτής της προόδου είναι:

$$S=\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}}=\frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$$

Καθώς το E τείνει στο 1, δηλαδή καθώς τα ορθογώνια γίνονται στενότερα, το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων πλησιάζει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη. Θέτοντας $E = 1$ στον παραπάνω τύπο για το άθροισμα των ορθογωνίων, προκύπτει ότι το ζητούμενο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $\psi = x^n$, από x = 0 έως x = α είναι: $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$

Για ρητές κλασματικές τιμές, θέτουμε $n=\frac{p}{q}$, οπότε το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$S=a^{(p+q)/q}\left(\frac{1-E^q}{1-E^{p+q}}\right)=a^{(p+q)/q}\left(\frac{1+E+E^2+\cdots+E^{q-1}}{1+E+E^2+\cdots+E^{p+q-1}}\right)$$

και όταν $E = 1$, έχουμε το ζητούμενο εμβαδόν:

$$\frac{q}{p+q}\ a^{(p+q)/q}$$

Αν τώρα ζητείται το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $\psi = x^n$, από x = α έως x = b, τότε σύμφωνα με το σύγχρονο συμβολισμό, έχουμε: $\int_a^b x^n dx=\int_0^b x^n dx-\int_0^a x^n dx.$

Ο Fermat χρησιμοποίησε μια παρόμοια διαδικασία για αρνητικές τιμές του n (εκτός της $n=-1$), με τη μόνη διαφορά ότι θεώρησε το E μεγαλύτερο της μονάδας και ότι έτεινε στη μονάδα από μεγαλύτερες τιμές. Το εμβαδόν που υπολόγισε ήταν αυτό κάτω από την καμπύλη από x = α έως το άπειρο. Και προφανώς το $\int_a^b x^{-n}dx=\int_\alpha^\infty x^{-n}dx-\int_b^\infty x^{-n}dx.$

Η θεωρία των αριθμών και η μέθοδος της "άπειρης καθόδου"

Ο Fermat θεωρείται ένας από τους ιδρυτές της σύγχρονης θεωρίας των αριθμών και ασχολήθηκε με θέματα όπως οι τέλειοι και οι φίλοι αριθμοί, οι πολυγωνικοί αριθμοί, τα μαγικά τετράγωνα, οι Πυθαγόρειες τριάδες, η διαιρετότητα και κυρίως οι πρώτοι αριθμοί. Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων του χρησιμοποίησε μεταξύ άλλων μεθόδων και τη μέθοδο της *άπειρης καθόδου*, η οποία αποτελεί ένα είδος αντεστραμμένης ***μαθηματικής επαγωγής (*)***. Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό του τρόπου εφαρμογής της μεθόδου από τον Fermat.

<u>Πρόβλημα:</u> Να αποδειχθεί ότι ο $\sqrt{3}$ δεν είναι ρητός

Υποθέτουμε ότι ο $\sqrt{3}$ είναι ρητός και μάλιστα ισχύει ότι

$\boldsymbol{\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1}}$, όπου a_1, b_1 θετικοί ακέραιοι και $a_1 > b_1$ (1)

Γνωρίζουμε ότι ισχύει: $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (2)

Η (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{\frac{a_1}{b_1}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{3b_1-a_1}{a_1-b_1}$

Επιπλέον ισχύει η σχέση $\frac{3}{2} < \frac{a_1}{b_1} < 2$. Έτσι έχουμε:

$\frac{3}{2} < \frac{a_1}{b_1} \Leftrightarrow 3b_1 < 2a_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_2} = 3b_1 - a_1 < a_1$

$\frac{a_1}{b_1} < 2 \Leftrightarrow a_1 < 2b_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{b_2} = a_1 - b_1 < b_1$

Επομένως για τους θετικούς ακέραιους $\boldsymbol{\alpha_2, b_2}$, είναι $\alpha_2 < a_1$ και $b_2 < b_1$,

έτσι ώστε να ισχύει $\boldsymbol{\sqrt{3} = \frac{a_2}{b_2}}$ (3)

Μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία άπειρες φορές, και να οδηγηθούμε σε μία άπειρη κάθοδο, όπου οι όροι a_n και b_n είναι όλο και μικρότεροι ακέραιοι, τέτοιοι ώστε να είναι πάντα $\boldsymbol{\sqrt{3} = \frac{a_n}{b_n}}$

Αυτό το λανθασμένο συμπέρασμα δείχνει ότι δεν υπάρχει μικρότερος θετικός ακέραιος. Επομένως, η υπόθεση ότι ο $\sqrt{3}$ ισούται με το πηλίκο δύο ακεραίων είναι λανθασμένη.

<u>Σχόλιο</u>: Ο Fermat χρησιμοποίησε τη μέθοδο της άπειρης καθόδου για να αποδείξει ότι δεν υπάρχει κύβος ο οποίος να διαιρείται σε δύο άλλους κύβους, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, ψ, z τέτοιοι ώστε $x^3 + \psi^3 = z^3$. Στη συνέχεια διατύπωσε την εικασία, ότι για έναν ακέραιο *n > 2* δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, ψ, z τέτοιοι ώστε $x^n + \psi^n = z^n$. Σημείωσε στο περιθώριο του αντίτυπου του *Διόφαντου*, του Bachet, ότι είχε μία πραγματικά εξαίρετη απόδειξη αλλά δεν μπορεί να γραφεί σε αυτό το στενό περιθώριο. Αυτό είναι το περίφημο "τελευταίο" ή

“μέγα” θεώρημα του Fermat, το οποίο προσπάθησαν να αποδείξουν πολλοί μαθηματικοί στο πέρασμα των αιώνων. Τελικά απεδείχθη από τον Άντριου Ουάιλς (Andrew Wiles) μετά από πολυετή επίπονη προσπάθεια και η απόδειξη δημοσιεύθηκε στο *Annals of Mathematics* (Μάιος 1995).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Fermat να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων: ι) $f(x) = (x+1)(2x^2+5x-7)$, ιι) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

2. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Fermat να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^4 x^5 dx\,, \qquad \int_2^\infty \left({}^1\!/_{x^3}\right) dx\,, \qquad \int_0^1 x^{5/2}\, dx$$

3. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ και τη μέθοδο του Fermat της “άπειρης καθόδου” να αποδείξετε ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.

(*) ***<u>Μαθηματική Επαγωγή</u>***

Υπενθυμίσεις για την απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης $\boldsymbol{\pi}$

<u>1^{ος} τρόπος</u>: η μέθοδος των συνεπαγωγών

Ξεκινάμε από μία αληθή πρόταση $\boldsymbol{p}$ (υπόθεση ή θεώρημα) και με συνεπαγωγές $(\Rightarrow)$ καταλήγουμε στην $\boldsymbol{\pi}$.

Ισχύει ότι: Αν $\begin{cases} p \Rightarrow q & \text{αληθής} \\ p & \text{αληθής} \end{cases}$, τότε q αληθής

<u>2^{ος} τρόπος</u>: η μέθοδος του “αρκεί”

Ξεκινάμε από την πρόταση $\boldsymbol{\pi}$ και με αρκεί $(\Leftarrow)$ καταλήγουμε σε μία αληθή πρόταση

Ισχύει ότι: "q αρκεί p" *σημαίνει*: "$p \Rightarrow q$"

<u>3^{ος} τρόπος</u>: η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο

Ξεκινάμε από την ***“όχι π”*** και με συνεπαγωγές καταλήγουμε σε άτοπο

Ισχύει ότι: Από τις δύο προτάσεις $\boldsymbol{\pi}$ και ***“όχι π”*** η μία είναι αληθής και η άλλη ψευδής

<u>Σημείωση:</u>

Για να αποδείξουμε ότι μία πρόταση ισχύει, δεν είναι αρκετό να βρούμε οσαδήποτε πολλά παραδείγματα για τα οποία η πρόταση ισχύει. Για να αποδείξουμε όμως ότι μία πρόταση δεν ισχύει, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο η πρόταση δεν ισχύει (**αντιπαράδειγμα**)

$4^{ος}$ τρόπος: **η μαθηματική επαγωγή**

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Έστω P (ν) ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακεραίους. Αν
(i) ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1, δηλαδή ο P(1) είναι αληθής, και
(ii) η αλήθεια του P (ν) συνεπάγεται την αλήθεια του P (ν +1) για κάθε ν,
τότε ο ισχυρισμός P (ν) αληθεύει για όλους τους (άπειρους το πλήθος) θετικούς ακεραίους ν

Και τα δύο βήματα είναι απολύτως αναγκαία, για να εξασφαλίσουμε την αλήθεια ενός ισχυρισμού, γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθος συμπεράσματα.

Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $\nu^2-\nu+41$ για $\nu=2$ έχει την τιμή 41, που είναι πρώτος αριθμός, (δηλαδή δεν έχει άλλο διαιρέτη εκτός της μονάδας και του εαυτού του). Αλλά και για $\nu=2,3,4,5,6,7,8,9,10$ έχουμε τις τιμές 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131 αντιστοίχως, που είναι όλοι επίσης πρώτοι αριθμοί. Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να υποθέσει ότι για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό ν η τιμή του πολυωνύμου $\nu^2-\nu+41$ είναι πρώτος αριθμός. Αυτό όμως, ενώ ισχύει μέχρι και $\nu=40$, δεν ισχύει για $\nu=41$, για το οποίο έχουμε $41^2-41+41=41^2$, που δεν είναι πρώτος.

Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις στις οποίες ικανοποιείται το $2^ο$ βήμα της μαθηματικής επαγωγής χωρίς όμως να ικανοποιείται και το $1^ο$. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τον ισχυρισμό:

"κάθε φυσικός της μορφής 2ν είναι περιττός"

Αν και ο ισχυρισμός είναι προφανώς ψευδής, ωστόσο ισχύει το $2^ο$ βήμα της μαθηματικής επαγωγής. Πράγματι, αν ο αριθμός 2ν με ν φυσικό είναι περιττός, τότε $2(\nu+1)=2\nu+2$ είναι επίσης περιττός, ως άθροισμα του περιττού 2ν με τον άρτιο 2.

<u>Σημείωση:</u>

Πολλές φορές χρειάζεται να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός $P\,(\nu)$ αληθεύει για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από κάποιο ορισμένο φυσικό αριθμό.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

1. Γνωρίζουμε από τις ιδιότητες απολύτων τιμών, ότι για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ (1)

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu \in R$ ισχύει:

$$|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu| = |\alpha_1||\alpha_2| \cdots |\alpha_\nu| \quad (2)$$

<u>Λύση</u>

Στο $1^{\text{ο}}$ βήμα, αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα (2) επαληθεύεται για $\nu = 1$.

Πράγματι, προφανώς αληθεύει η ισότητα $|\alpha| = |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in R$

Στο $2^{\text{ο}}$ βήμα, αφού υποθέσουμε ότι η ιδιότητα (2) αληθεύει για ν αριθμούς, την αποδεικνύουμε για $\nu + 1$ το πλήθος αριθμούς.

Έστω λοιπόν ότι ισχύει η σχέση $|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu| = |\alpha_1||\alpha_2| \cdots |\alpha_\nu|$ (2)

Τότε, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu\alpha_{\nu+1}| = |\alpha_1||\alpha_2| \cdots |\alpha_\nu||\alpha_{\nu+1}| \quad (3)$$

Πράγματι, έχουμε:

$$|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu\alpha_{\nu+1}| = |(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu)\alpha_{\nu+1}| \overset{(1)}{=} |\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu||\alpha_{\nu+1}| \overset{(2)}{=} |\alpha_1||\alpha_2| \cdots |\alpha_\nu||\alpha_{\nu+1}|$$

από όπου συνεπάγεται η αλήθεια της (3).

Επομένως η ισότητα αληθεύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς ν.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 4$, ισχύει:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu > 2^\nu \quad (1)$$

<u>Λύση</u>

Επαγωγικά έχουμε:

Για ν = 4 η (1) γίνεται: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 \Leftrightarrow 24 > 16$, το οποίο ισχύει

Δεχόμαστε ότι ισχύει η πρόταση $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu > 2^\nu$ (1)

και θα αποδείξουμε ότι $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu \cdot (\nu + 1) > 2^{\nu+1}$ (2)

Από την (1) προκύπτει: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu \cdot (\nu + 1) > 2^\nu \cdot (\nu + 1)$

Επομένως για να αποδειχθεί η (2), αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$2^\nu \cdot (\nu + 1) \geq 2^{\nu+1}$, αρκεί $\nu + 1 \geq 2$, αρκεί $\nu \geq 1$, το οποίο ισχύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Παρατηρούμε ότι η ανισότητα $2^{\nu} < 2^{100} + \nu$ αληθεύει για $\nu = 1, 2, 3, \cdots, 100$.

Μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι αληθεύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς;

2. Να αποδείξετε ότι αν $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2}{2}$ είναι αληθής για $\nu = \kappa \geq 1$, τότε είναι αληθής και για $\nu = \kappa + 1$. Είναι αυτό αρκετό για να αποδείξουμε ότι η ισότητα ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς ν; Ισχύει πράγματι η ισότητα για κάθε φυσικό αριθμό ν;

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$, ισχύουν:

α) $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$

β) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

γ) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$

4. Να δειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \mathrm{N}^*$, ισχύει : $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2\nu - 1) \cdot (2\nu + 1)} = \frac{\nu}{2\nu + 1}$

5. Να δειχθεί ότι : $5^{\nu} > 5\nu - 1, \nu \in \mathrm{N}^*$

6. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu, \nu \in \mathrm{N}^*$, είναι πολλαπλάσιο του 3

7. Να αποδείξετε ότι για όλους τους θετικούς ακέραιους ν με $\nu \geq 2$ και για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α με $\alpha \neq 0$ και $\alpha > -1$ ισχύει: $(1 + \alpha)^{\nu} > 1 + \nu\alpha$
(ανισότητα του Bernoulli)

ΕΝΟΤΗΤΑ 7η

Οι βάσεις του σύγχρονου διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού (17ος – 18ος – 19ος αιώνας)

Ο **John Wallis** (1616 –1703) ήταν ο πιο σημαντικός Άγγλος μαθηματικός πριν τον Newton. Ένα από τα σημαντικότερα ίσως έργα του ήταν η *Arithmetica infinitorum* , που δημοσιεύθηκε το 1655, με το οποίο αριθμητικοποίησε την *Geometria indivisibilibus* του Cavalieri.

Ο Cavalieri είχε καταλήξει στον τύπο $\int_0^{\alpha} x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$, ζευγαρώνοντας τα γεωμετρικά αδιαίρετα ενός παραλληλογράμμου, με αυτά του ενός από τα δύο τρίγωνα στα οποία το διαιρεί μία διαγώνιός του. Ο Wallis εγκατέλειψε το γεωμετρικό υπόβαθρο, συνδέοντας τα απείρως πολλά αδιαίρετα των σχημάτων με αριθμητικές τιμές. Έτσι, αν θέλουμε να συγκρίνουμε τα τετράγωνα των αδιαίρετων του τριγώνου, με τα τετράγωνα των αδιαίρετων του παραλληλόγραμμου, θεωρούμε το μήκος του πρώτου αδιαίρετου ίσο με μηδέν, του δεύτερου ένα, του τρίτου δύο, και ούτω καθεξής ως το τελευταίο, μήκους $n-1$, αν υπάρχουν n αδιαίρετα.
Έτσι, αν υπάρχουν δύο μόνο αδιαίρετα στα δύο σχήματα, ο λόγος των τετραγώνων θα είναι:

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} \text{ ή } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

αν υπάρχουν τρία αδιαίρετα, θα είναι:

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

αν υπάρχουν τέσσερα αδιαίρετα, θα είναι:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

για $n+1$ αδιαίρετα, θα είναι:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Αν το n τείνει στο άπειρο, ο λόγος προφανώς θα είναι ίσος με $\frac{1}{3}$. (Όταν το n τείνει στο άπειρο, ο όρος $\frac{1}{6n}$ γίνεται $\frac{1}{\infty}$, ή μηδέν. Ο Wallis ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το σύμβολο για το άπειρο).

Αυτό ισοδυναμεί με το ότι $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Χρησιμοποιώντας δε ατελή επαγωγή (για την οποία του ασκήθηκε κριτική από τον Fermat), συμπέρανε ότι $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$, για κάθε ακέραιο m.

NEWTON και LEIBNIZ

O Isaac Newton (1642 –1727) και ο Gottfried Wilhejm Leibniz (1646 –1716) θεωρούνται οι ιδρυτές του σύγχρονου διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Ο Newton προηγήθηκε του Leibniz κατά δέκα περίπου χρόνια, αλλά η ανακάλυψη του Leibniz ήταν ανεξάρτητη του Newton και δικαιούται τον τίτλο της πρώτης παρουσίασής της , το 1684 στην *Acta Eruditorum*. Η πρώτη μελέτη που δημοσίευσε ο Newton για τον απειροστικό λογισμό εμφανίστηκε το 1687 στο *Philosophiae naturalis **principia** mathematica*, την πιο ξακουστή επιστημονική μελέτη όλων των εποχών.

Ο Newton ανακάλυψε το *θεώρημα του διωνύμου*. Μέσω αυτού προέκυψε η γνώση, ότι οι απειροσειρές δεν θεωρούνταν πλέον ότι έπαιζαν μόνο προσεγγιστικό ρόλο. Αντίθετα ήταν εναλλακτικές μορφές των συναρτήσεων που αντιπροσώπευαν. Επίσης για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, βρέθηκε ένα εμβαδόν με τη βοήθεια της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης.

Το διώνυμο του Newton:
$(\alpha+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}x^k + \cdots + x^n\ ,\ n \in N^*,$

$k = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Για $\alpha = 1$ και για κάθε n, έχουμε τη διωνυμική σειρά:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k\ ,\ \ |x| < 1$$

η οποία για $n \in Q - N$, γίνεται:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots,\ \text{όπου}\ x \epsilon (-1,1)$$

<u>Σχόλιο</u>: συνδυασμοί $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n,\quad 0! = 1$

Ο Leibniz ασχολήθηκε με τη μελέτη των απειροσειρών και με άλλα θέματα της απειροστικής ανάλυσης. Περί το 1673 συνειδητοποίησε ότι ο καθορισμός της εφαπτομένης στην καμπύλη εξαρτιόταν από το λόγο των διαφορών των τετμημένων και των τεταγμένων, καθώς αυτές γίνονται απείρως μικρές, και ότι οι τετραγωνισμοί εξαρτιόνταν από το άθροισμα των τεταγμένων ή απείρως λεπτών ορθογωνίων που αποτελούσαν το εμβαδόν.

EULER

Ο Ελβετός μαθηματικός **Leonhard Euler** (1707 –1783) έκανε για την ανάλυση του Newton και του Leibniz ότι έκανε ο Ευκλείδης για τη γεωμετρία του Ευδόξου και του Θεαίτητου. Πήρε το διαφορικό λογισμό και τη μέθοδο των ρυθμών μεταβολής και τα έκανε μέρος ενός γενικότερου κλάδου των μαθηματικών, ο οποίος είναι από τότε γνωστός ως *«ανάλυση»,* η μελέτη των άπειρων διαδικασιών. Η δίτομη μελέτη του Euler με τίτλο *Introductio in analysin infinitorum* του 1748, ήταν η πηγή των εξελίξεων στα μαθηματικά, αναδεικνύοντας την έννοια της συνάρτησης σε βασικό ρόλο στην ανάλυση.

Ακόμα και ένας μαθηματικός της εμβέλειας του Euler όμως, έκανε σημαντικά λάθη, όπως στην ενασχόλησή του με τις απειροσειρές.

Εργαζόταν για παράδειγμα με τη διωνυμική σειρά:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \text{ για } x \geq 1$$

Συνδυάζοντας τις δύο σειρές $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots$ και $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots$ ο Euler συμπέρανε ότι $\cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0$

Επίσης, αν στο διωνυμικό θεώρημα εφαρμόσουμε τυπικά το $(1-2)^{-1}$ βρίσκουμε

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots,$$

ένα αποτέλεσμα που δεν προξένησε καμία έκπληξη στον Euler.

Οι μαθηματικοί του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα είχαν περιορισμένη κατανόηση για τις απειροσειρές και αυτό το πεδίο της ανάλυσης δημιούργησε πολλά παράδοξα. Ας θεωρήσουμε, ως ένα ακόμα παράδειγμα, τη σειρά:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Αν ομαδοποιήσουμε τους όρους του άπειρου αθροίσματος με ένα συγκεκριμένο τρόπο, έχουμε

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

ενώ, αν ομαδοποιήσουμε τους όρους με διαφορετικό τρόπο, έχουμε

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

Ο Luigi Grandi (1671 –1742) επιχειρηματολογούσε ότι αφού τα αθροίσματα είναι ίσα, πιθανώς το σωστό άθροισμα να είναι η μέση τιμή τους, δηλαδή 1/2. Αυτή η τιμή, επίσης, μπορεί να προκύψει με έναν καθαρά τυπικό τρόπο, έτσι έχουμε

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S$$

από όπου προκύπτει $2S = 1 \Leftrightarrow S = 1/2$

ΣΧΟΛΙΟ: Μία από τις πιο φημισμένες ισότητες όλων των εποχών οφείλεται στον Euler. Ανακάλυψε τον αξιοσημείωτο τύπο

$$e^{-ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x,$$

από όπου, για $x = \pi$ προκύπτει

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Περιλαμβάνει τους πέντε πιο σημαντικούς αριθμούς, τη σημαντικότερη σχέση και τη σημαντικότερη πράξη.

Σύγχρονος του Euler, ο **Jean d' Alembert** (1717 –1783) πίστευε ότι ο πυρήνας του απειροστικού λογισμού βρισκόταν στην έννοια του *ορίου*. Ονόμασε μία ποσότητα το όριο μιας δεύτερης (μεταβλητής) ποσότητας, αν η δεύτερη μπορεί να πλησιάσει την πρώτη περισσότερο από κάθε δεδομένη ποσότητα (χωρίς όμως να συμπέσει με αυτήν).

Ο **Augustin – Louis Cauchy** (1789 –1857) θεώρησε την έννοια του ορίου του d' Alembert βασική, αλλά της έδωσε έναν αριθμητικό χαρακτήρα μεγαλύτερης ακρίβειας. Έδωσε ένα σχετικά σαφή ορισμό του ορίου:

Όταν οι διαδοχικές τιμές που δίνουμε σε μια μεταβλητή πλησιάζουν απεριόριστα μία συγκεκριμένη τιμή, έτσι ώστε να διαφέρουν από αυτήν όσο λίγο εμείς θέλουμε, τότε αυτή η τελευταία ονομάζεται το όριο όλων των άλλων.

Επιπλέον, σε αντίθεση με προγενέστερους μαθηματικούς που θεωρούσαν το απειροστό ως έναν πολύ μικρό συγκεκριμένο αριθμό, ο Cauchy το όρισε σαφώς ως μια εξαρτημένη μεταβλητή:

Θεωρούμε ότι μία μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή, όταν η αριθμητική της τιμή ελαττώνεται απεριόριστα έτσι ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν.

Οι έννοιες της *συνάρτησης* και του *ορίου* της ήταν πρωτεύουσες για τον Cauchy. Ορίζοντας την παράγωγο του $\psi = f(x)$ ως προς x, έδωσε στη μεταβλητή x μια ελάχιστη μεταβολή $\Delta x = i$ και σχημάτισε το λόγο

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Όρισε δε, ως την παράγωγο $f'(x)$ του ψ ως προς x, το όριο αυτού του πηλίκου διαφοράς καθώς το i τείνει στο μηδέν. Στο διαφορικό έδωσε δευτερεύοντα ρόλο. Αν dx είναι μία συγκεκριμένη ποσότητα, το διαφορικό dψ της συνάρτησης $\psi = f(x)$ ορίζεται απλά ως $d\psi = f'(x)dx$.

Ο Cauchy έδωσε επίσης έναν ικανοποιητικό ορισμό για τη *συνεχή* συνάρτηση. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα δεδομένο διάστημα αν, μέσα σε αυτό το διάστημα, μια απεριόριστα μικρή μεταβολή i της μεταβλητής x οδηγεί, πάντα, σε μια απεριόριστα μικρή μεταβολή, $f(x+i) - f(x)$, της ίδιας της συνάρτησης.

Το δέκατο όγδοο αιώνα, η ολοκλήρωση θεωρούνταν ως το αντίστροφο της παραγώγισης. Ο ορισμός του Cauchy για την παράγωγο, καθιστά σαφές ότι η παράγωγος δεν θα υπάρχει σε κάποιο σημείο, στο οποίο η συνάρτηση είναι *ασυνεχής*. Αντιθέτως, το ολοκλήρωμα δεν παρουσιάζει δυσκολία. Ακόμα και ασυνεχείς καμπύλες μπορεί να καθορίζουν καλά ορισμένες επιφάνειες. Έτσι ο Cauchy όρισε το ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσει του ορίου των ακέραιων αθροισμάτων, που δεν διαφέρει πολύ από αυτό που συναντάμε στα σημερινά εγχειρίδια, εκτός του ότι αυτός θεώρησε, παντού, την τιμή της συνάρτησης στο αριστερό άκρο του διαστήματος.

Αν $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$, τότε το όριο S αυτού του αθροίσματος S_n, καθώς οι ποσότητες των διαστημάτων $x_i - x_{i-1}$ ελαττώνονται απεριόριστα, είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$, στο διάστημα από το $x = x_0$ έως το $x = X$.

GEORG CANTOR και RICHARD DEDEKIND

Από την εποχή του Ζήνωνα συζητούσαν για το άπειρο στα μαθηματικά, αλλά κανένας πριν το 1872 δεν ήταν σε θέση να πει με ακρίβεια για ποιο πράγμα μιλούσε. Συνήθως στις συζητήσεις για το άπειρο, ανέφεραν παραδείγματα όπως απεριόριστη δύναμη ή απείρως μεγάλα μεγέθη. Σπανιότερα, ορισμένοι, όπως ο Γαλιλαίος και ο Bolzano, εστίασαν την προσοχή τους στα απείρως πολλά στοιχεία μιας συλλογής, για παράδειγμα των φυσικών αριθμών ή των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος. Ο Cauchy και ο Weierstrass είδαν μόνο παράδοξα στις προσπάθειές τους να ονομάσουν ένα πραγματικό ή "πλήρες" άπειρο στα μαθηματικά, πιστεύοντας ότι το απεριόριστα μεγάλο ή μικρό δεν σήμαινε τίποτα παραπάνω από τη δυνητικότητα του Αριστοτέλη – μία μη ολοκλήρωση της όποιας διαδικασίας. Ο Cantor και ο Dedekind κατέληξαν σε διαφορετικό συμπέρασμα. Ο Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen – Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί – 1872) είδε μια γενική ιδιότητα των απειροσυνόλων, την οποία θεώρησε ως έναν ακριβή ορισμό:

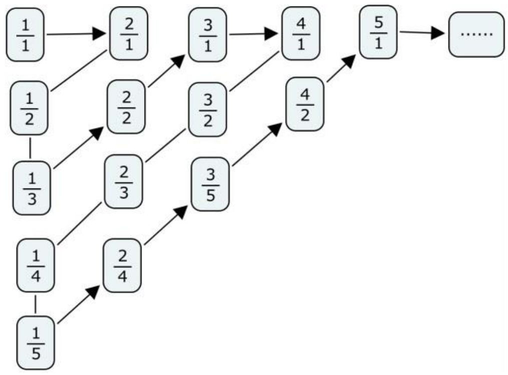
Ένα σύστημα S ονομάζεται άπειρο όταν είναι όμοιο με ένα γνήσιο τμήμα του. Στην αντίθετη περίπτωση το S ονομάζεται πεπερασμένο σύστημα.

Με σύγχρονη ορολογία, ένα σύνολο S στοιχείων ονομάζεται άπειρο, αν τα στοιχεία ενός γνήσιου υποσυνόλου του S' μπορούν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με τα στοιχεία του S. Για παράδειγμα, το σύνολο S των φυσικών αριθμών είναι άπειρο, επειδή το υποσύνολό του S' που αποτελείται από όλους τους τρίγωνους αριθμούς, είναι τέτοιο ώστε σε κάθε στοιχείο n του S αντιστοιχεί ένα στοιχείο του S' που δίνεται από τον τύπο $n(n+1)/2$.

Αριθμητικό τρίγωνο

1	1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…	
1	3	6	10	15	…		
1	4	10	20	…			
1	5	15	…				
1	6	…					
1	…						

Ο Cantor (Journal του Crelle, 1874) είχε επίσης αναγνωρίσει τη βασική ιδιότητα των απειροσυνόλων, αλλά αντίθετα με τον Dedekind , παρατήρησε ότι όλα τα απειροσύνολα δεν είναι ίδια. Αν μιλάμε για πεπερασμένα σύνολα, δυο σύνολα θεωρούμε ότι έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία τους ένα προς ένα. Με παρόμοιο τρόπο, ο Cantor θέλησε να κάνει μια ιεράρχηση των απειροσυνόλων σύμφωνα με τον "πληθάριθμο" του συνόλου. Έτσι, το σύνολο των τέλειων τετραγώνων ή το σύνολο των τρίγωνων αριθμών έχουν τον ίδιο πληθάριθμο με το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων, γιατί τα στοιχεία τους μπορούν να τεθούν σε μία ένα προς ένα αντιστοιχία. Μολονότι τα σύνολα αυτά φαίνεται ότι είναι πολύ μικρότερα από το σύνολο όλων των ρητών κλασμάτων, ο Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών είναι ***αριθμήσιμο***, δηλαδή ότι και αυτό μπορεί να τεθεί σε μία ένα προς ένα αντιστοιχία με τους θετικούς ακεραίους, επομένως έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Η απόδειξη αυτή του Cantor είναι πολύ απλή. Γράφουμε όλους τους θετικούς ακεραίους, επαναλαμβάνοντάς τους σε σειρές, και διαιρούμε την πρώτη σειρά με 1, τη δεύτερη με 2, την τρίτη με 3, κ.ο.κ.. Στη συνέχεια παίρνουμε όλους τους ρητούς, αρκεί να ακολουθήσουμε τα βέλη στο παρακάτω σχήμα.



Τα ρητά κλάσματα σχηματίζουν ένα *πυκνό* σύνολο, δηλαδή ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε από αυτά, ανεξάρτητα από το πόσο κοντά βρίσκονται, θα υπάρχει πάντα ακόμα ένα. Πράγματι το σημείο $c = \frac{1}{2}(a+b)$ είναι ρητός και βρίσκεται ακριβώς στο μισό της απόστασης μεταξύ των ρητών α και b. Γιατί, αν $a < b$, $c - a = b - c = \frac{1}{2}(b-a)$. Η διαδικασία δε της διχοτόμησης αυτής συνεχίζεται δίχως τέλος. Παρόλα αυτά, με την παραπάνω διάταξη αποδεικνύεται ότι το σύνολο των κλασμάτων έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το σύνολο των ακεραίων.

Στη συνέχεια ο Cantor απέδειξε ότι όλα τα σύνολα δεν έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Για παράδειγμα, το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει μεγαλύτερο πληθάριθμο από το σύνολο των ρητών. Η απόδειξη έγινε με τη βοήθεια της *απαγωγής σε άτοπο*. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι πραγματικοί αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1 είναι αριθμήσιμοι και γράφονται ως δεκαδικοί με άπειρα ψηφία (για παράδειγμα το $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, το $\frac{1}{2} = 0{,}4999\ldots$ κ.ο.κ.) και στη συνέχεια τους τοποθετούμε σε αριθμήσιμη διάταξη, ως εξής:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ \ldots,$$

$$\alpha_2 = 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ \ldots,$$

$$\alpha_3 = 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots,$$

όπου α_{ij} είναι ένα ψηφίο ανάμεσα στο 0 και το 9. Σχηματίζουμε τώρα το δεκαδικό

$\beta = 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots$ όπου $\beta_\kappa = 9$ αν $\alpha_{\kappa\kappa} = 1$ και $\beta_\kappa = 1$ αν $\alpha_{\kappa\kappa} \neq 1$. Αυτός ο πραγματικός αριθμός θα βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1 και παρόλα αυτά δεν θα είναι ίσος με κανέναν από αυτούς στην παραπάνω διάταξη, η οποία υπενθυμίζουμε ότι ισχυρισθήκαμε ότι περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς αριθμούς από το 0 έως το 1.

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να διαιρεθούν σε δύο είδη με δύο διαφορετικούς τρόπους: ($1^{ος}$) σε ρητούς και άρρητους ή ($2^{ος}$) σε αλγεβρικούς και υπερβατικούς (*). Ο Cantor απέδειξε ότι η κλάση των αλγεβρικών αριθμών, η οποία είναι πολύ γενικότερη από αυτή των ρητών, έχει τον ίδιο πληθάριθμο με αυτή των ακεραίων. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε, ότι οι υπερβατικοί αριθμοί είναι αυτοί που δίνουν στους πραγματικούς αριθμούς την *"πυκνότητα"* η οποία ανεβάζει τον πληθάριθμο. Η πυκνότητα δηλαδή παίζει ουσιαστικό ρόλο στον καθορισμό του πληθάριθμου ενός συνόλου. Αυτό φαίνεται καθαρά από την παρακάτω πρόταση:

Ο πληθάριθμος του συνόλου των σημείων μιας απεριόριστα εκτεινόμενης ευθείας είναι ο ίδιος ακριβώς με τον πληθάριθμο του συνόλου των σημείων σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα, όσο μικρό και είναι αυτό.

Ακόμη πιο εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι ο αριθμός των διαστάσεων δεν καθορίζει τον πληθάριθμο του συνόλου. Έτσι, ο πληθάριθμος του συνόλου των σημείων σε ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν των σημείων σε ένα μοναδιαίο εμβαδόν ή σε ένα μοναδιαίο όγκο.

Την εποχή της διατύπωσης της θεωρίας του ο Cantor κατέβαλε μεγάλη προσπάθεια να πείσει τους συγχρόνους του, γιατί ήταν μεγάλος ο φόβος του απείρου *(horror infiniti)* και οι μαθηματικοί δίσταζαν να δεχθούν το ολοκληρωμένο άπειρο. Συγκεντρώνοντας λοιπόν όλες τις αποδείξεις του, ο Cantor, δημιούργησε μια ολόκληρη *υπερπεπερασμένη* αριθμητική και ο "πληθάριθμος" ενός συνόλου έγινε ο "πληθικός αριθμός" του συνόλου. Έτσι ο "αριθμός" του συνόλου των ακεραίων είναι ο "μικρότερος" υπερπεπεραμένος αριθμός, E ή $\aleph_0$ ή Άλεφ – μηδέν ή d (denumerable), και ο "αριθμός" του συνόλου των πραγματικών αριθμών ή των σημείων μιας ευθείας είναι ένας "μεγαλύτερος" αριθμός, C ή $\aleph_1$ ή $2^{\aleph_0}$, ο αριθμός του συνεχούς ("continuum"). Ο Cantor απέδειξε ότι υπάρχουν απείρως πολλοί υπερπεπερασμένοι αριθμοί πέραν του C. Απέδειξε ότι το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου έχει πάντοτε μεγαλύτερο πληθάριθμο από το ίδιο το σύνολο. Επομένως, ο "αριθμός" του συνόλου των υποσυνόλων του C είναι ένας τρίτος υπερπεπερασμένος αριθμός, το σύνολο των υποσυνόλων αυτού του συνόλου υποσυνόλων ορίζει έναν τέταρτο "αριθμό" κ.ο.κ. Όπως υπάρχουν απείρως πολλοί φυσικοί αριθμοί, έτσι υπάρχουν και απείρως πολλοί υπερπεπερασμένοι αριθμοί.

Ο Cantor τέλος ανέπτυξε και μια αριθμητική υπερπεπερασμένων τακτικών αριθμών η οποία διαφέρει πολύ από την τακτική αριθμητική. Όσον αφορά στις πεπερασμένες περιπτώσεις, οι κανόνες για τους τακτικούς αριθμούς είναι ουσιαστικά ίδιοι με αυτούς για τους πληθικούς αριθμούς. Έτσι $2 + 3 = 3 + 2$, ανεξάρτητα αν αυτά τα ψηφία παριστάνουν πληθικούς ή τακτικούς αριθμούς.
Αν όμως θεωρήσουμε ότι ω είναι ο τακτικός αριθμός των φυσικών αριθμών, τότε $\omega + 1$ δεν ισούται με τον $1 + \omega$, διότι προφανώς ο $1 + \omega$ ισούται με ω.
Αποδεικνύεται επίσης ότι $\omega + \omega = \omega$ και $\omega \cdot \omega = \omega$, ιδιότητες που δεν θυμίζουν καθόλου αυτές των πεπερασμένων τακτικών αλλά αυτές των υπερπεπερασμένων πληθικών.

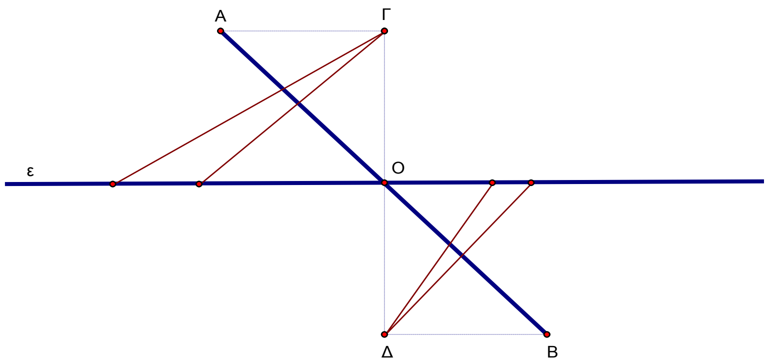
Υπάρχουν πολλά άλυτα προβλήματα σχετικά με την ύπαρξη και τις ιδιότητες των υπερπεπερασμένων αριθμών. Μόλις πολύ πρόσφατα απαντήθηκε το ερώτημα αν υπάρχει αριθμός μεταξύ των $\aleph_0$ και C, δηλαδή αν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $\aleph_0 < \lambda < C$. Ο Cantor θεωρούσε ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα ήταν αρνητική και πολλοί μεταγενέστεροι μελετητές υπέθεταν ότι αυτό τελικά θα αποδεικνυόταν με βάση τα γενικά παραδεκτά αξιώματα τα θεωρίας συνόλων. Στο μεταξύ, η εικασία ότι τέτοιος αριθμός λ δεν υπάρχει ονομάστηκε ***«υπόθεση του συνεχούς»*** και πολλά μαθηματικά προβλήματα λύθηκαν με βάση αυτήν την υπόθεση. Οι εργασίες όμως των Γκέντελ (K. Gödel,1941) και Κόχεν (P. J. Cohen, 1963) απέδειξαν τελικά ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι ένα ανεξάρτητο θεώρημα της θεωρίας συνόλων. Επομένως, κάθε συνεπής θεωρία συνόλων μπορεί είτε να το περιέχει είτε όχι. Με αυτόν τον τρόπο, η θεωρία συνόλων έφθασε σε μία θέση ανάλογη με αυτήν της κλασικής γεωμετρίας σχετικά με το ευκλείδειο αίτημα των παραλλήλων – αφού κάθε συνεπής γεωμετρία μπορούσε είτε να περιέχει αυτό το αίτημα είτε όχι.

(*) Σχόλιο

Αλγεβρικός αριθμός ορίζεται ο αριθμός που αποτελεί ρίζα κάθε εξίσωσης της μορφής $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$ όπου οι συντελεστές $a_n,\ a_{n-1}, \dots, a_1,\ a_0$ είναι ακέραιοι, $n > 0$ επίσης ακέραιος. Ένας αριθμός ο οποίος δεν είναι αλγεβρικός ονομάζεται *υπερβατικός*. Η απόδειξη της ύπαρξης υπερβατικών αριθμών και η απόδειξη ότι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός είναι υπερβατικός είναι δύο εντελώς διαφορετικά πράγματα, με το δεύτερο να είναι σαφώς δυσκολότερο. Ο Charles Hermite, το 1873, απέδειξε ότι ο αριθμός $\boldsymbol{e}$, η βάση των φυσικών λογαρίθμων, είναι υπερβατικός και ο C. L. F. Lindemann , το 1882, απέδειξε πρώτος την υπερβατικότητα του αριθμού $\boldsymbol{\pi}$. Να λοιπόν και η απάντηση στο κλασικό πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Για να είναι δυνατός ο τετραγωνισμός του κύκλου με τον ευκλείδειο τρόπο, θα έπρεπε ο αριθμός $\boldsymbol{\pi}$ να είναι ρίζα μιας αλγεβρικής εξίσωσης με μία ρίζα που μπορεί να εκφραστεί ως τετραγωνική ρίζα. Εφόσον όμως ο $\boldsymbol{\pi}$ δεν είναι αλγεβρικός, ο κύκλος δεν μπορεί να τετραγωνισθεί σύμφωνα με τους κλασικούς κανόνες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να αποδείξετε ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των σημείων μιας απεριόριστα εκτεινόμενης ευθείας είναι ακριβώς ο ίδιος με τον πληθάριθμο του συνόλου των σημείων σε κάθε τμήμα της ευθείας, όσο μικρό και αν είναι αυτό



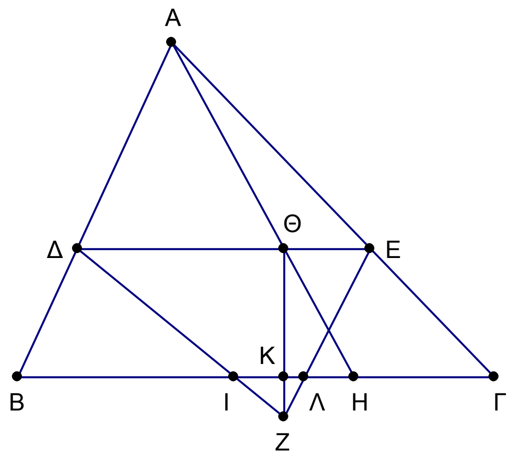
2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των άρτιων θετικών ακεραίων (δηλαδή έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό)

3. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των περιττών θετικών ακεραίων είναι αριθμήσιμο και να γράψετε τον πληθικό αριθμό του.

4. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και το σύνολο των σημείων ενός άλλου ευθύγραμμου τμήματος Α΄Β΄ έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό. Τα δύο σύνολα είναι αριθμήσιμα ή υπεραριθμήσιμα; Ποιος είναι ο πληθικός τους αριθμός;

5. Στο Βιβλίο Ι από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη υπάρχει μία αναλυτική λίστα από 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 5 προφανείς έννοιες, ως βασικά συστατικά της Ελληνικής αξιωματικής μεθόδου. Μία από τις προφανείς έννοιες στην ευκλείδεια γεωμετρία είναι **«το όλον είναι μεγαλύτερο από το μέρος»**. Μπορείτε να σχολιάσετε την αλήθεια αυτού του ισχυρισμού όταν θεωρούμε πληθικούς αριθμούς απειροσυνόλων;

6. Να εξηγήσετε με τη βοήθεια του κατά Dedekind ορισμού του απειροσυνόλου, πώς το παρακάτω σχήμα δείχνει ότι το σύνολο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ένα απειροσύνολο



8. α) Να αποδείξετε ότι κάθε ρητός αριθμός είναι ένας αλγεβρικός αριθμός. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι κάθε πραγματικός υπερβατικός αριθμός είναι άρρητος.

β) Είναι κάθε άρρητος αριθμός υπερβατικός;

γ) Η φανταστική μονάδα $\boldsymbol{i}$ είναι αλγεβρικός ή υπερβατικός αριθμός;

9. Είναι δυνατόν σε μια ευθεία ή έναν κύκλο του καρτεσιανού επιπέδου να περιέχουν μόνο σημεία με συντεταγμένες ρητούς αριθμούς ή αλγεβρικούς αριθμούς;

10. Επάνω σε μία ευθεία γραμμή επιλέγουμε άπειρα κλειστά διαστήματα χωρίς κοινά σημεία μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι το απειροσύνολο που κατασκευάσαμε είναι αριθμήσιμο.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8^{η}

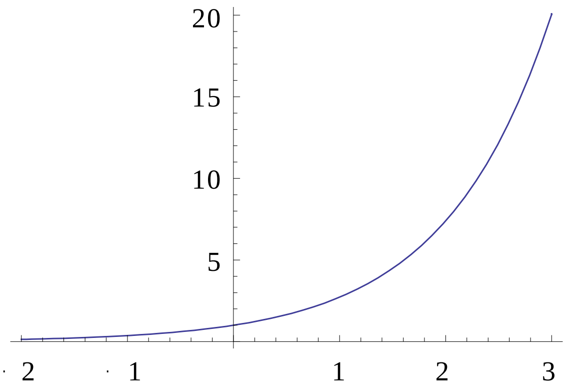
ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η έννοια του ορίου είναι η πιο σημαντική στον απειροστικό λογισμό. Στόχος αυτής της ενότητας είναι μία διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου, καθώς επίσης και ο ορισμός της.

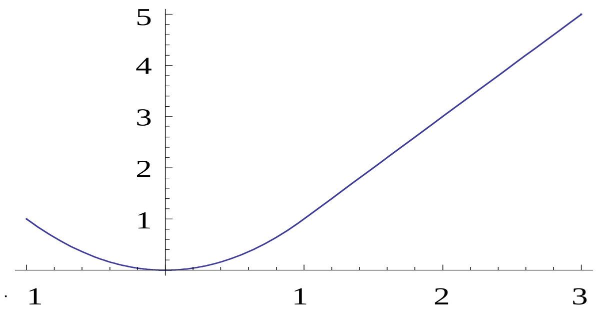
Μας ενδιαφέρει να κατανοήσουμε τι σημαίνει η έκφραση – ορισμός :

Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ τείνει στο όριο $\boldsymbol{l}$ κοντά στο $\boldsymbol{x_0}$, αν μπορούμε να φέρουμε το $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ όσο κοντά θέλουμε στο $\boldsymbol{l}$ απαιτώντας το **x** να είναι αρκετά κοντά στο $\boldsymbol{x_0}$**,** αλλά όχι ίσο με το $\boldsymbol{x_0}$.

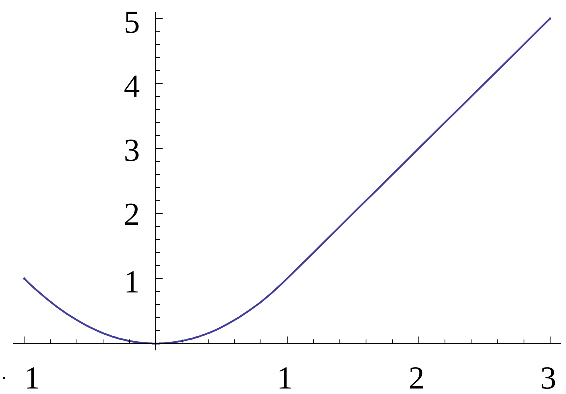
Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις έξι συναρτήσεων, εκ των οποίων μόνο οι τρείς πρώτες τείνουν στον αριθμό $\boldsymbol{l = e}$ (η f) και $\mathbf{1}$ **,** κοντά στο $\boldsymbol{x_0 = 1}$.



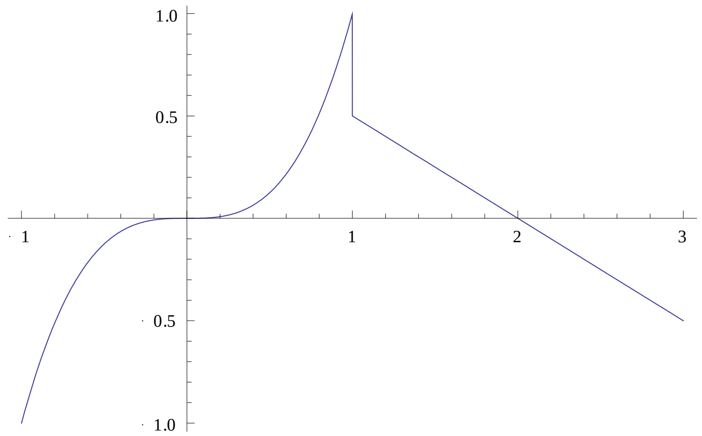
$f(x) = e^x$



$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

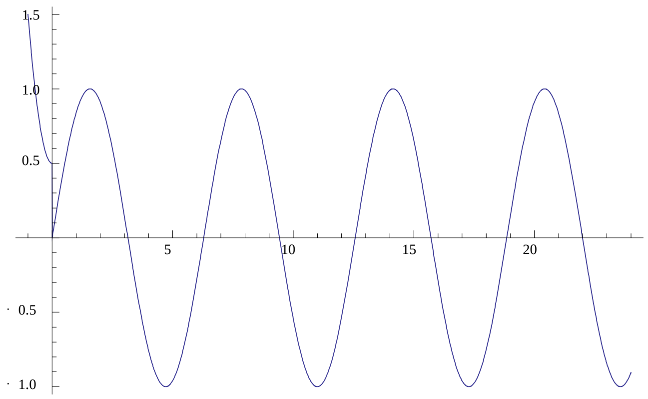


$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$



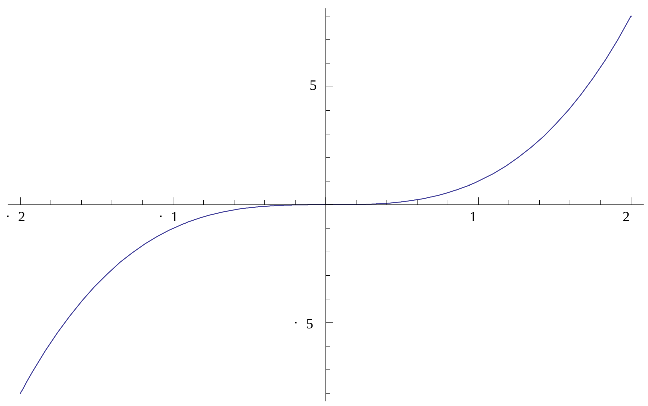
$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση φ δεν τείνει σε κανένα $\boldsymbol{l}$ κοντά στο 1



$$k(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}, & x < 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$$

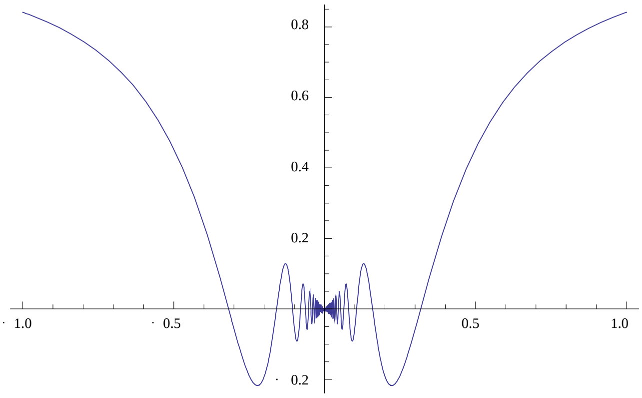
Η συνάρτηση k δεν τείνει σε κανένα $\boldsymbol{l}$ κοντά στο 0

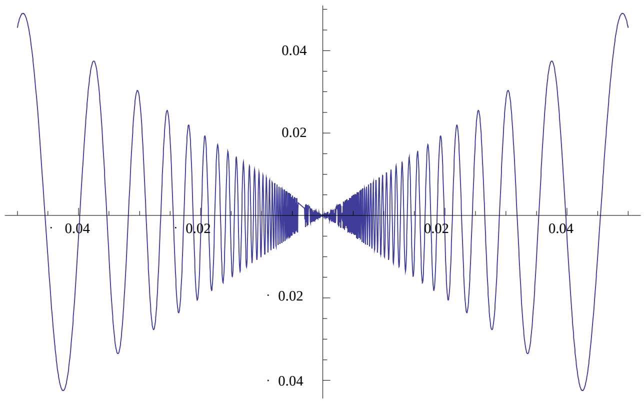


$t(x) = x^3$ Η συνάρτηση t δεν τείνει στο 5 κοντά στο 1

Είναι άξιο σχολιασμού, ότι δεν ενδιαφερόμαστε για την τιμή $f(x_0)$, ούτε καν θέτουμε το ερώτημα αν το $f(x_0)$ ορίζεται. Αυτό που μας ενδιαφέρει, για να υπάρχει το όριο, είναι ότι αρκεί το $f(x)$ να είναι κοντά στο l για x κοντά στο x_0, αλλά όχι ίσο με το x_0.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^{ο}</u>: Δοκιμάζουμε τον ορισμό στη συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$, με γραφική παράσταση την ακόλουθη





Η συμπεριφορά της συνάρτησης κοντά στο 0 είναι περίεργη, αλλά είναι εμφανές, τουλάχιστον διαισθητικά, ότι η f τείνει στο 0, όταν το x είναι κοντά στο 0. Στην προκειμένη περίπτωση, τόσο το x_0 όσο και το l του ορισμού είναι το 0, επομένως προσπαθούμε να δούμε αν το $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$ μπορεί να έλθει όσο θέλουμε κοντά στο 0, αν απαιτήσουμε το x να είναι αρκετά κοντά στο 0, αλλά $\neq 0$.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θέλουμε το $x\eta\mu\frac{1}{x}$ σε απόσταση το πολύ $\frac{1}{10}$ από το 0. Δηλαδή θέλουμε

$$-\frac{1}{10} < x\eta\mu\frac{1}{x} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{10}$$

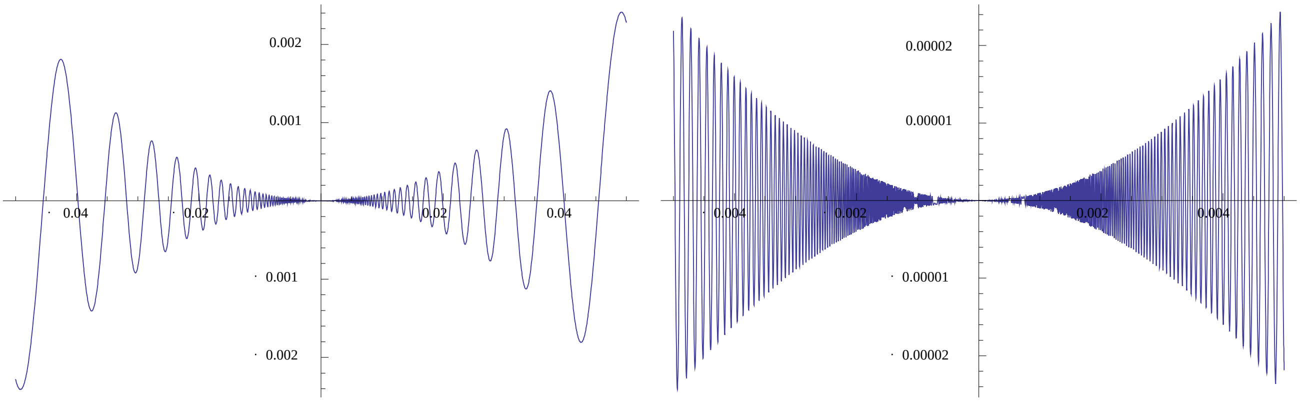
Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq 1$, για κάθε $x \neq 0$. Επομένως $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x|$, για κάθε $x \neq 0$

Αυτό σημαίνει ότι αν θέσουμε $|x| < \frac{1}{10}$ και $x \neq 0$, τότε $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{10}$

Το συμπέρασμα λοιπόν είναι, ότι το $x\eta\mu\frac{1}{x}$ απέχει λιγότερο από $\frac{1}{10}$ από το 0, αρκεί το x να απέχει λιγότερο από το $\frac{1}{10}$ από το 0, και $x \neq 0$.

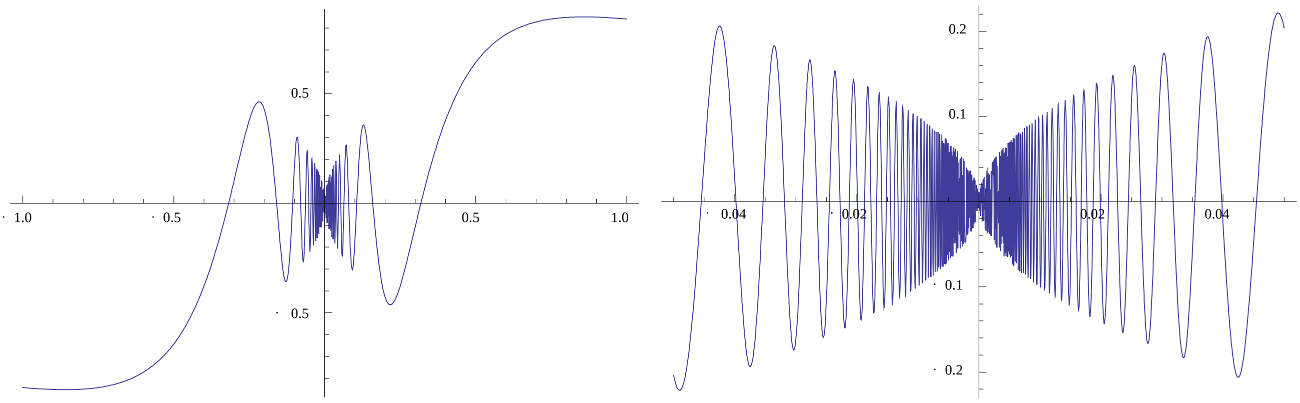
Επειδή ο αριθμός $\frac{1}{10}$ δεν έχει κάτι το ιδιαίτερο, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την απόσταση να είναι $\frac{1}{100}$, δηλαδή $|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$ απλά απαιτώντας $|x| < \frac{1}{100}$, $x \neq 0$. Στην πραγματικότητα, αν πάρουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε, μπορούμε να κάνουμε το $|f(x) - 0| < \varepsilon$ απλά ζητώντας $|x| < \varepsilon$, $x \neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο: Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 \eta\mu\frac{1}{x}$, με γραφική παράσταση την ακόλουθη. Να μελετηθεί η συμπεριφορά της στο 0



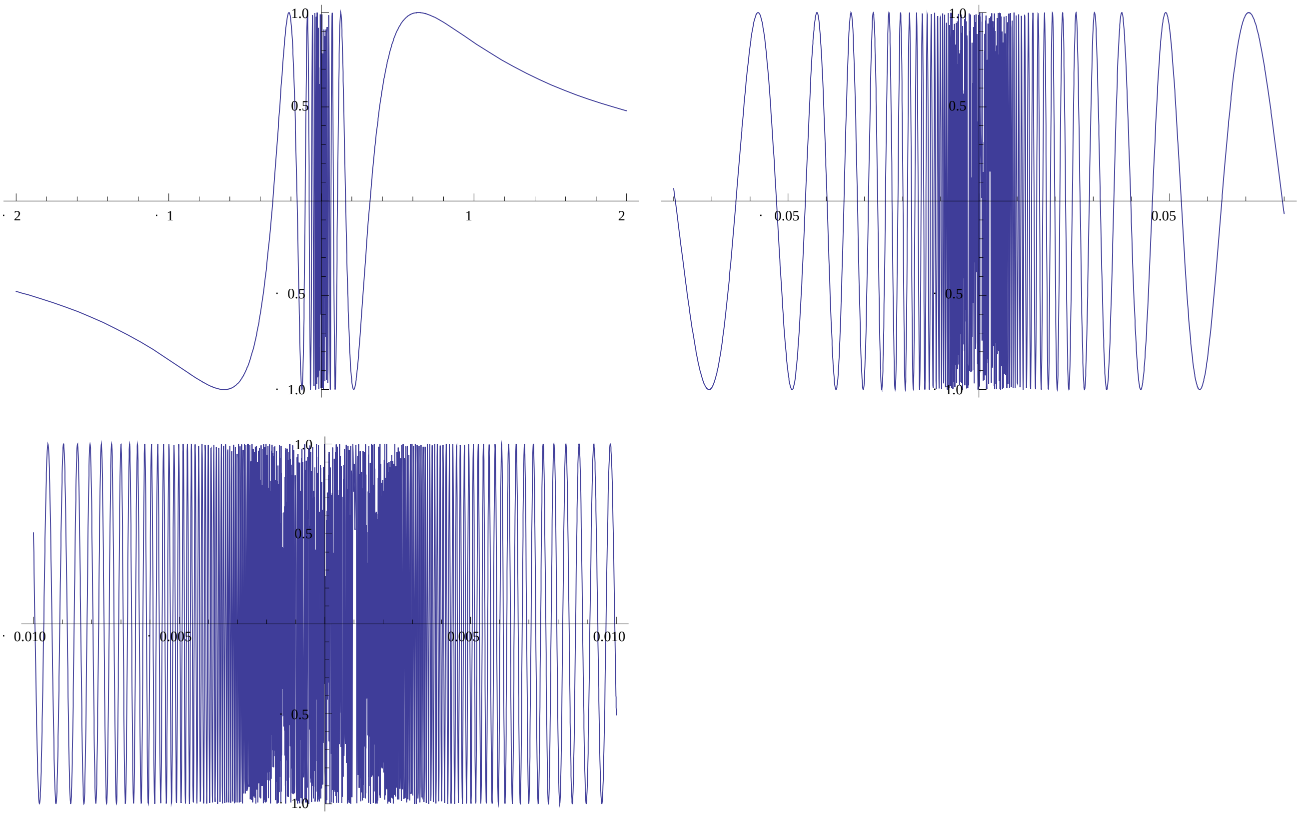
Υπόδειξη: $\left|x^2 \eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x^2| < \frac{1}{100} < \frac{1}{10}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}\, \eta\mu\frac{1}{x}$, με γραφική παράσταση την ακόλουθη. Να μελετηθεί η συμπεριφορά της στο 0



Υπόδειξη: Για να κάνουμε το $\left|\sqrt{|x|}\, \eta\mu\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, μπορούμε να απαιτήσουμε $|x| < \varepsilon^2$ και $x \neq 0$, αν $\varepsilon \leq 1$, ή $|x| < 1$ και $x \neq 0$ αν $\varepsilon > 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο : Ας εξετάσουμε τώρα τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$, με γραφική παράσταση την ακόλουθη



Για τη συνάρτηση αυτή δεν ισχύει ότι η f τείνει στο 0 κοντά στο 0. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχυρισθούμε ότι δεν ισχύει για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$, μπορούμε να κάνουμε το $|f(x) - 0| < \varepsilon$, διαλέγοντας x αρκετά μικρά και $\neq 0$.

Για να το αποδείξουμε, αρκεί να βρούμε ένα $\varepsilon > 0$ για το οποίο να μην εξασφαλίζεται η συνθήκη $|f(x) - 0| < \varepsilon$, όσο μικρό και αν απαιτήσουμε να είναι το $|x|$.

Ας χρησιμοποιήσουμε την τιμή $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι $|f(x) - 0| < \frac{1}{2}$ όσο μικρό και αν ζητήσουμε να είναι το $|x|$. Γιατί αν Δ είναι οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το $x_0 = 0$, υπάρχει κάποιος αριθμός $x = \frac{1}{90+360n}$, $n\epsilon Z$ που βρίσκεται σε αυτό το διάστημα και για το οποίο είναι $f(x) = 1$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f δεν τείνει σε κανέναν αριθμό κοντά στο 0. Η διαδικασία είναι να βρούμε, για οποιοδήποτε τώρα δεδομένο αριθμό l, κάποιον αριθμό $\varepsilon > 0$ τέτοιον ώστε η σχέση $|f(x) - l| < \varepsilon$ να μην ισχύει, όσο μικρό και αν απαιτήσουμε να είναι το x.

Ας χρησιμοποιήσουμε πάλι την τιμή $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Όσο μικρό και αν ζητήσουμε να είναι το $|x|$, δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $|f(x) - l| < \frac{1}{2}$. Αυτό συμβαίνει, γιατί σε κάθε διάστημα Δ που περιέχει το 0, υπάρχει κάποιο $x_1 = \frac{1}{90+360n},\ n\epsilon Z$ σε αυτό το διάστημα, τέτοιο ώστε $f(x_1) = 1$,

και επιπλέον ακόμα κάποιο $x_2 = \frac{1}{270+360n},\ n\epsilon Z$ σε αυτό το διάστημα, τέτοιο ώστε $f(x_2) = -1$.

Αλλά το διάστημα μεταξύ των τιμών $l - \frac{1}{2}$ και $l + \frac{1}{2}$ δεν μπορεί να περιέχει και τις δύο τιμές ± 1, αφού το συνολικό του μήκος είναι μόνο 1. Επομένως δεν μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα

$|1 - l| < \frac{1}{2}$ και $|-1 - l| < \frac{1}{2}$ οποιοδήποτε και να είναι το l.

Παραδείγματα:

1. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$, όποιο και να είναι το x_0, δεν τείνει σε κανέναν αριθμό l κοντά στο x_0

2. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$, τείνει στο 0 όταν το x τείνει στο 0, αλλά δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό α, αν $\alpha \neq 0$

3. Η συνάρτηση $f(x) = c$, τείνει στο c κοντά στο x_0, για κάθε x_0

4. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, δεν τείνει σε κανέναν αριθμό κοντά στο 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ας καταλήξουμε τώρα στον αυστηρά μαθηματικό ορισμό:

Η συνάρτηση f **συγκλίνει στο όριο l κοντά στο x_0,** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$

Τότε γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

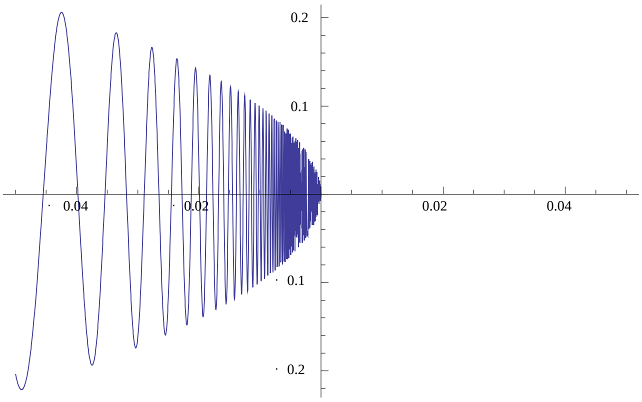
Αν μία συνάρτηση f δεν συγκλίνει στο όριο l κοντά στο x_0, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την άρνηση του παραπάνω ορισμού, δηλαδή:

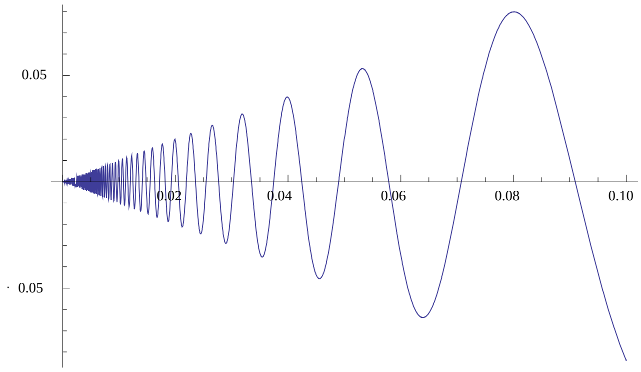
Υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει κάποιο x που ικανοποιεί την $0 < |x - x_0| < \delta$, αλλά όχι την $|f(x) - l| < \varepsilon$

Τότε γράφουμε ότι « το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει »

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Υπάρχουν όμως και συναρτήσεις που δεν ορίζονται για όλα τα x που ικανοποιούν την $0 < |x - x_0| < \delta$, αλλά για αριθμούς μικρότερους ή μεγαλύτερους από το x_0, όπως αυτές που φαίνονται ακολούθως (για $x_0 = 0$)





Τότε γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ (όριο από τα αριστερά ή από κάτω), και σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < x_0 - x < \delta, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon$$

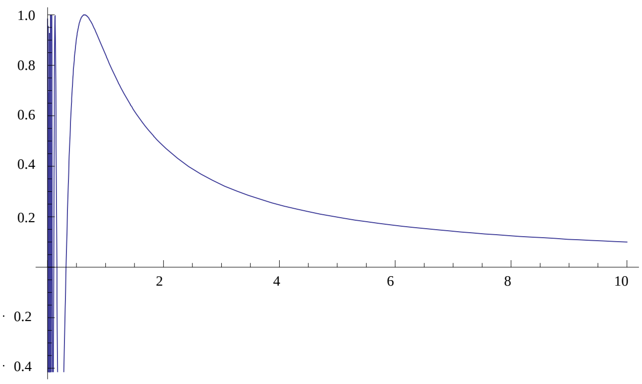
Και $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (όριο από τα δεξιά ή από πάνω), και σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

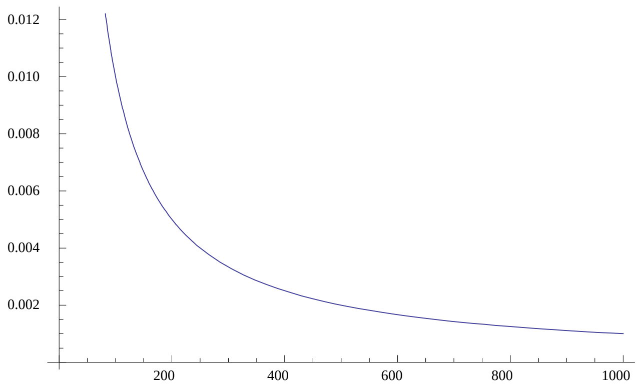
$$\text{αν } 0 < x - x_0 < \delta, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Είναι φανερό ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει, αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Ας παρατηρήσουμε τώρα την συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ για μεγάλες τιμές του x.





Παρατηρούμε ότι όταν το x είναι μεγάλο, τότε το $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι κοντά στο 0.

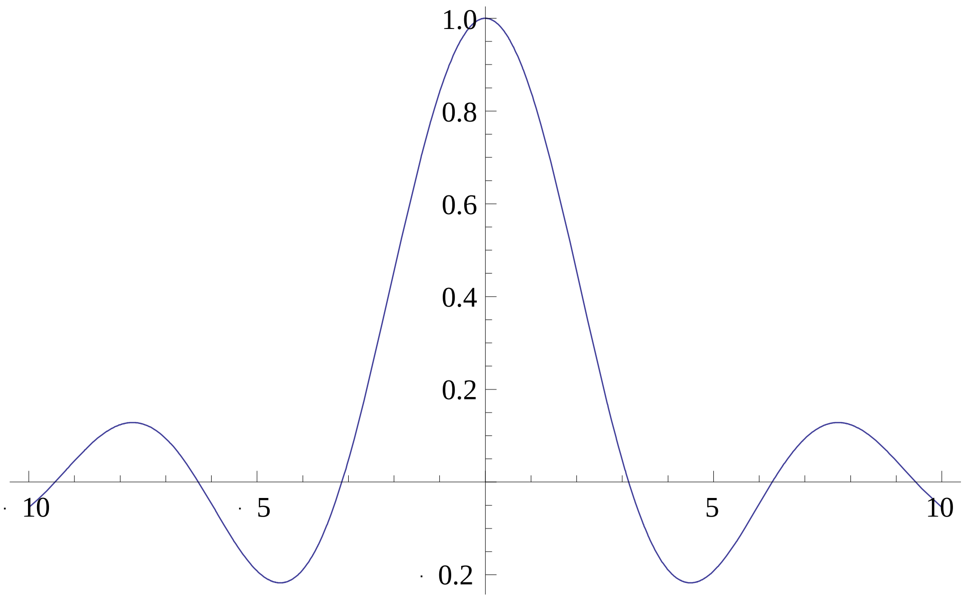
Αυτό γράφεται ως $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu\frac{1}{x} = 0$

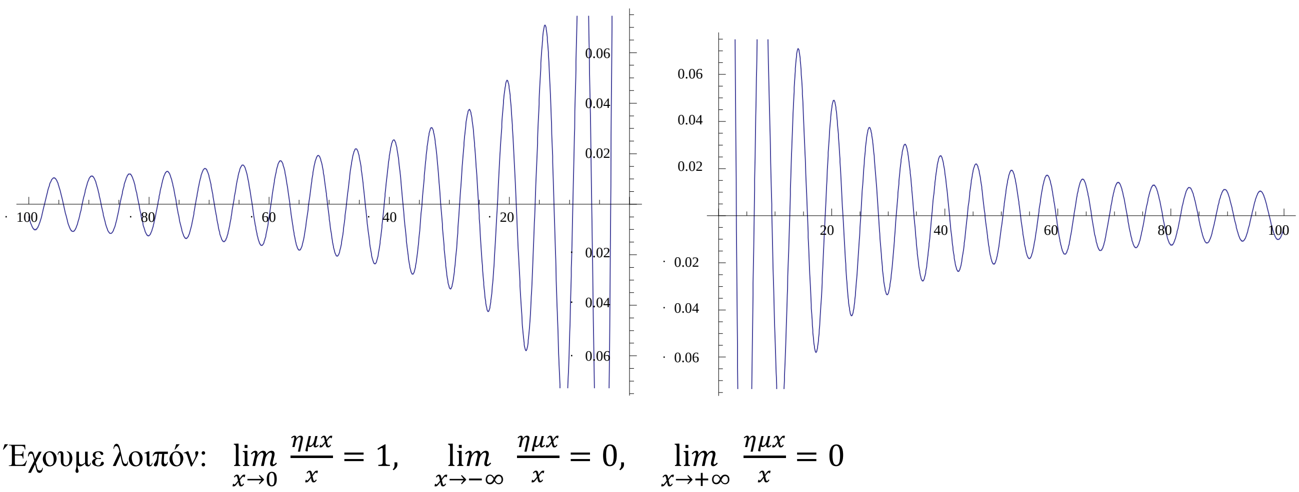
Γράφουμε λοιπόν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, και διαβάζουμε «το όριο του $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$».

Τυπικά, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός $N > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε x, αν $x > N,$ τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$

Αντίστοιχα ορίζεται το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις φαίνεται η συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$





Έχουμε λοιπόν: $\lim\limits_{x\to0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

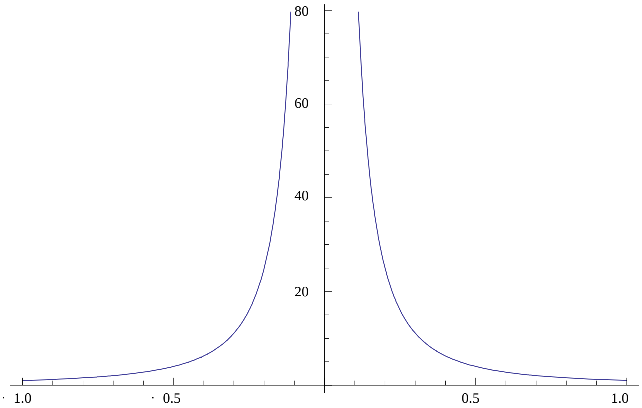
Παρατηρούμε ότι στο $\pm\infty$ η γραφική παράσταση τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα x΄x, παρότι τον τέμνει ενδιάμεσα σε άπειρα σημεία.

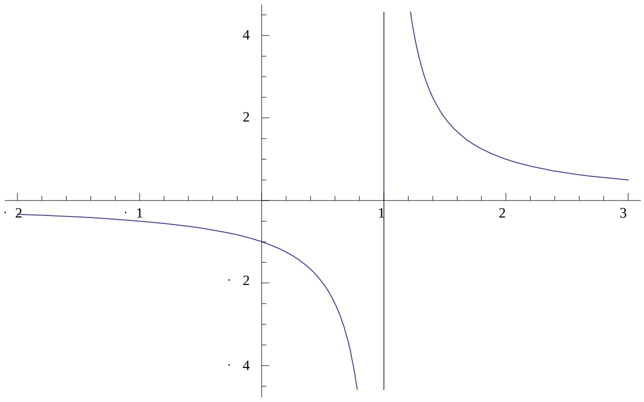
Ορίζουμε το $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ να σημαίνει ότι για κάθε $N > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, $\alpha\nu\ \ 0 < |x - x_0| < \delta,$ τότε $f(x) > N$

Ορίζουμε το $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ να σημαίνει ότι για κάθε $N > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, $\alpha\nu\ \ 0 < |x - x_0| < \delta,$ τότε $f(x) < -N$

Με αντίστοιχους τρόπους ορίζονται τα όρια: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty,\quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty,\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

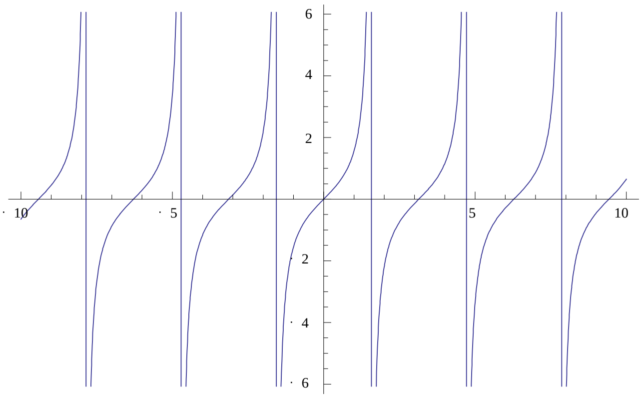
<u>Παραδείγματα:</u>

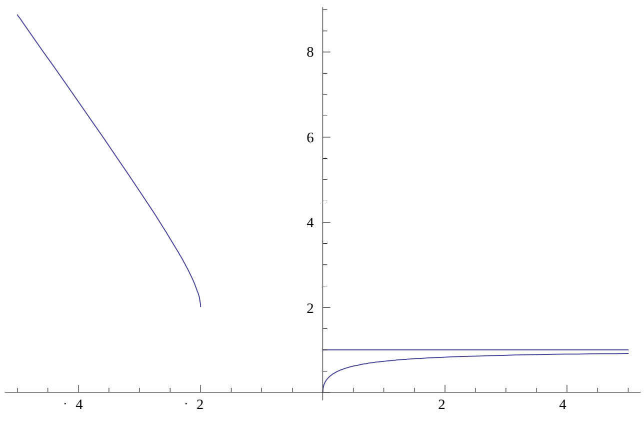




$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ & $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Κατακόρυφες ασύμπτωτες, αντίστοιχα, οι ευθείες: $x = 0$ & $x = 1$
Οριζόντια ασύμπτωτη, και στις δύο περιπτώσεις, ο άξονας x΄x

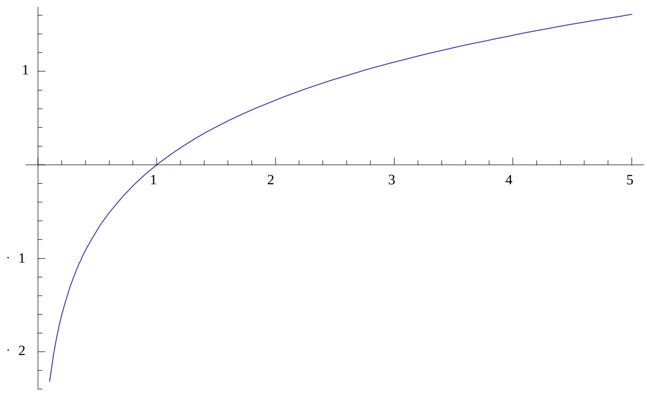


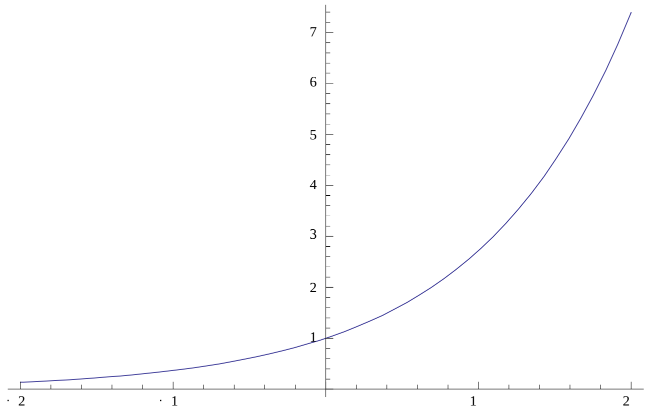


$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty$ & $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = +\infty$ & $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1$

Η $\varepsilon\varphi x$ έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες της μορφής $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2},\ \kappa \epsilon Z$

Η $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = 1$





$$\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty \ \ \& \ \lim_{x\to +\infty} lnx = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \ \& \ \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$$

Η lnx έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα ψ΄ψ

Η e^x έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα x΄x

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια της να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

α) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, στο $x_0 = 2$

β) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1}$, στο $x_0 = -1$, ή $\pm\infty$

γ) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, στο $x_0 = 1$, ή $\pm\infty$

δ) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$, στο $x_0 = 1$, ή $\pm\infty$

ε) $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu\, x}{x}, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$, στο $x_0 = 0$, ή $\pm\infty$

<u>ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ</u>

Μία διαισθητική προσέγγιση

1. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = 1 - x^2,\ x \in R \quad \text{και} \quad h(x) = 1 + x^4,\ x \in R$$

Στη συνέχεια (διαισθητικά), να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} h(x)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση f/R, με $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^4,\ x \in R$

Ποια είναι στο καρτεσιανό επίπεδο η θέση της C_f ως προς τις C_g και C_h;

Τι εικάζετε για τη συμπεριφορά της f κοντά στο $x_0 = 0$;

Ποιο πιστεύετε ότι είναι (διαισθητικά) το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

<u>Θεώρημα</u>: **Τ*ο* κριτήριο παρεμβολής**

Δίνονται οι συναρτήσεις g, f, h. Αν ισχύει ότι

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = l$,

τότε, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$

3. Αν κάποια από τις τρεις συναρτήσεις g, f, h (ή και οι τρεις) δεν ορίζεται στο x_0, τότε ισχύει το θεώρημα; Που ακριβώς πρέπει να ορίζονται;

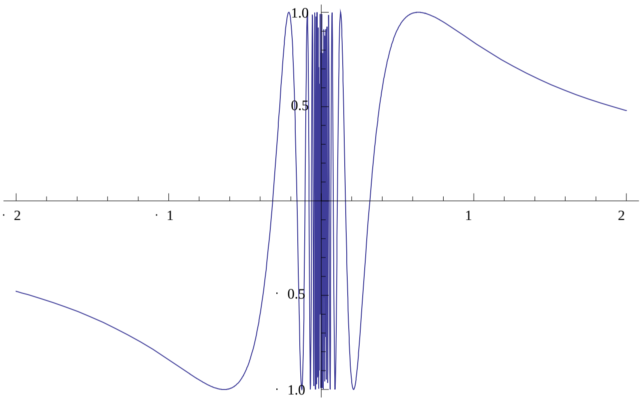
Υπάρχει ενδιαφέρον για τις τιμές $g(x_0)$, $f(x_0)$, $h(x_0)$, όσον αφορά στα όρια;

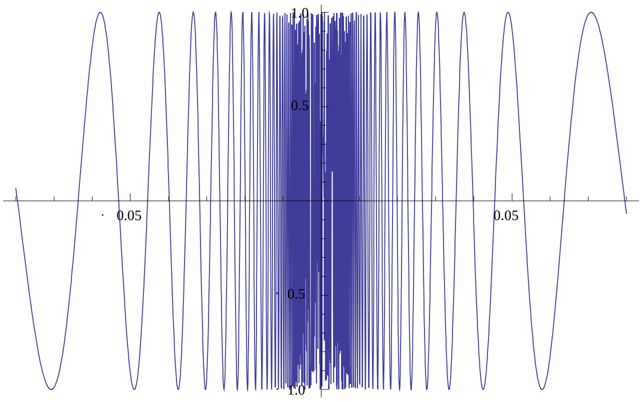
4. α) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = |x|, \quad h(x) = -|x|$$

Να βρείτε τα όρια των παραπάνω συναρτήσεων όταν $x \to 0$

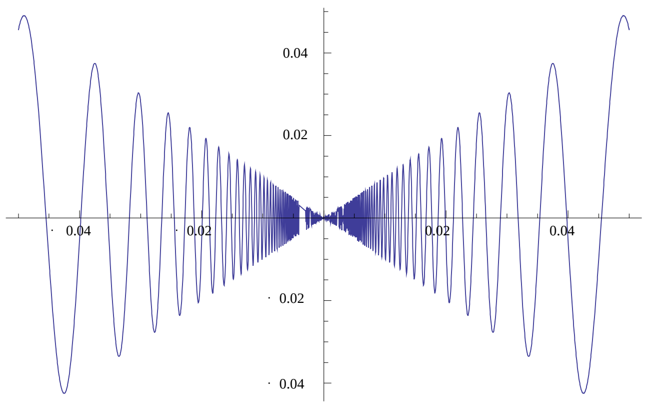
β) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$, $x \neq 0$





Ποια παρατηρείτε ότι είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης k κοντά στο μηδέν;

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x\,\eta\mu\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, είναι



δ) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, f, h

ε) Να αποδείξετε και αλγεβρικά, ότι $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

ζ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$

<u>Προαπαιτούμενες γνώσεις</u>:

για κάθε $x, \psi \in R$, ισχύουν:

- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, $a > 0$
- $|\eta\mu x| \leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$
- $|x + \psi| \leq |x| + |\psi|$
- $|\eta\mu x| \leq |x|$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να βρείτε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων όταν $x \to 0$

$\alpha)$ $f(x) = x^2 \eta\mu\frac{1}{x}$, $\beta)$ $f(x) = x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, γ) $f(x) = \sqrt{x}\,\eta\mu\frac{1}{x}$, δ) $f(x) = \sqrt{|x|}\,\eta\mu\frac{1}{x}$

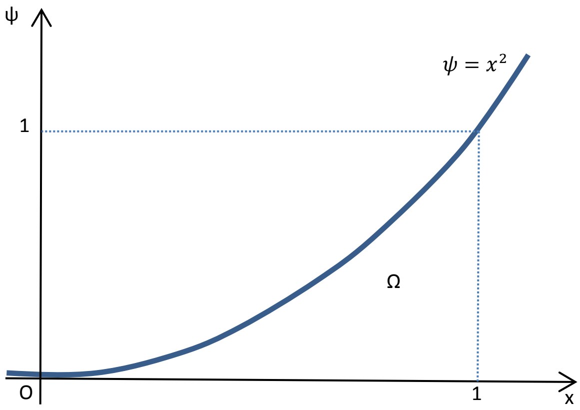
2. α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

β) Αν ισχύει ότι $\left|f(x)-\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le x^4$, $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *να βρείτε το* $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 9η</u>

Εμβαδόν παραβολικού χωρίου

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2$, του άξονα Ox και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

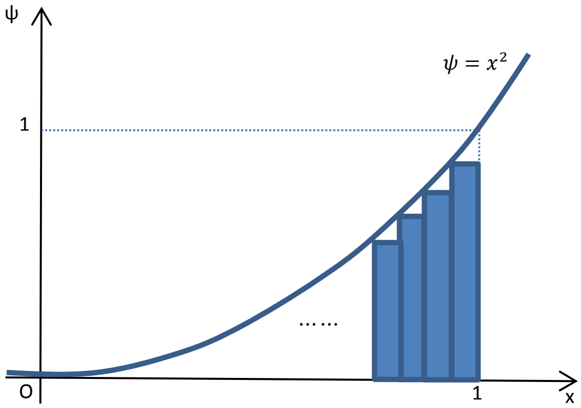


Μία μέθοδος για να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η ακόλουθη:

Χωρίζουμε το διάστημα [0,1] *σε* ν υποδιαστήματα ίσου μήκους $\Delta x = \frac{1}{\nu}$ με άκρα τα σημεία

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{\nu}, \quad x_2 = \frac{2}{\nu}, \quad \cdots\cdots\cdots, \quad x_{\nu-1} = \frac{\nu-1}{\nu}, \quad x_\nu = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

Κατασκευάζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα ανωτέρω υποδιαστήματα και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά.



Μία προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού είναι το άθροισμα ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων, δηλαδή:

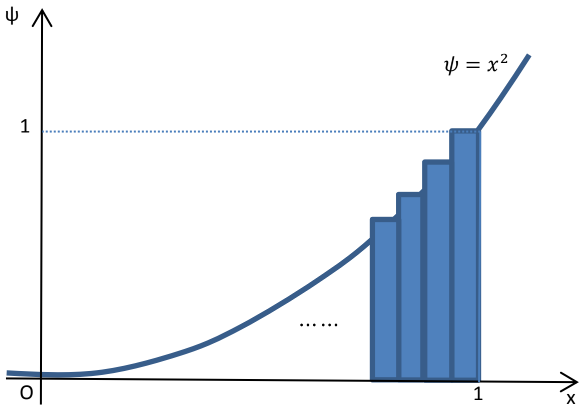
$$\varepsilon_\nu = f(0)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} =$$

$$\frac{1}{\nu}\left[0^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{\nu^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (\nu-1)^2] = \quad (*)$$

$$\frac{1}{\nu^3}\left[\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}\right]=\frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα ίδια υποδιαστήματα και ύψη τη μέγιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά



Μία ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού είναι το άθροισμα E_ν, των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών, δηλαδή:

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\cdots+f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}=$$

$$\frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\frac{2}{\nu}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]=$$

$$\frac{1}{\nu^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2]= \quad (**)$$

$$\frac{1}{\nu^3}\left[\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\right]=\frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}$$

Το ζητούμενο όμως εμβαδόν E του χωρίου Ω, βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν.
Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu$, επομένως

$$\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu \le E \le \lim_{\nu\to\infty}E_\nu$$

Επειδή όμως

$$\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim_{\nu\to\infty}E_\nu = \frac{1}{3} \quad (***)$$

έχουμε ότι $E=\frac{1}{3}$

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$I)\ \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$II)\ \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$III)\ \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$$

I) Το $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa=1+2+3+\cdots+\nu$ υποδηλώνει των άθροισμα των ν – πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=1$, διαφορά $\omega=1$ και ν – οστό όρο τον $\alpha_\nu=\nu$. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τη σχέση $\Sigma_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu}{2}(1+\nu)=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$

II) Για την απόδειξη του δεύτερου τύπου χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$(\kappa+1)^3=\kappa^3+3\kappa^2+3\kappa+1$$

$$\text{για }\ \kappa=1:\quad 2^3=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1$$

$$\text{για }\ \kappa=2:\quad 3^3=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{για }\ \kappa=\nu:\ (\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις ν προηγούμενες ισότητες, έχουμε μετά τις απλοποιήσεις:

$$(\nu+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)+3(1+2+\cdots+\nu)+\nu\cdot1\Leftrightarrow$$

$$3(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)=(\nu+1)^3-(\nu+1)-3(1+2+\cdots+\nu)\Leftrightarrow$$

$$3(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)=(\nu+1)^3-(\nu+1)-3\frac{\nu(\nu+1)}{2}\Leftrightarrow$$

$$(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)=\frac{(\nu+1)[2(\nu+1)^2-2-3\nu]}{6}\Leftrightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2=(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

2. Η τελευταία σχέση αποτελεί και την απόδειξη του τύπου (**)

3. Απόδειξη του τύπου (***), δηλαδή

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}=\frac{1}{3}$$

Το κλάσμα γίνεται: $\frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}=\frac{2\nu^2}{6\nu^2}+\frac{3\nu}{6\nu^2}+\frac{1}{6\nu^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{6\nu^2}$

Όταν τώρα το $\nu\to\infty$, οι όροι $\frac{1}{2\nu}\to 0$ και $\frac{1}{6\nu^2}\to 0$, επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να αποδείξετε ότι $[1^2+2^2+3^2+\cdots+(\nu-1)^2]=\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}$, δηλαδή ο τύπος (*)

2. Με τη βοήθεια του αναπτύγματος της ταυτότητας $(\kappa+1)^4$, να αποδείξετε τον τύπο III)

Βιβλιογραφία – Bibliography

Carl B. Boyer – Uta C. Merzbach, (1997), *Η Ιστορία των Μαθηματικών,* Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού

Howard Eves, (1990), *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Dover Publications Inc, Mineola, New York

Raymond L. Wilder , (1986), *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*, The Open University, Π. Κουτσούμπος Α.Ε.

George B. Thomas & Ross L. Finney, (2001), *Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο

Michael Spivak, (2007), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Philip J. Davis & Reuben Hersh, (1981), *The Mathematical Experience,* Birkhäuser, Boston

Robert Kaplan and Ellen Kaplan, (2003), *The Art of the Infinite: The Pleasures of Mathematics,* Oxford University Press