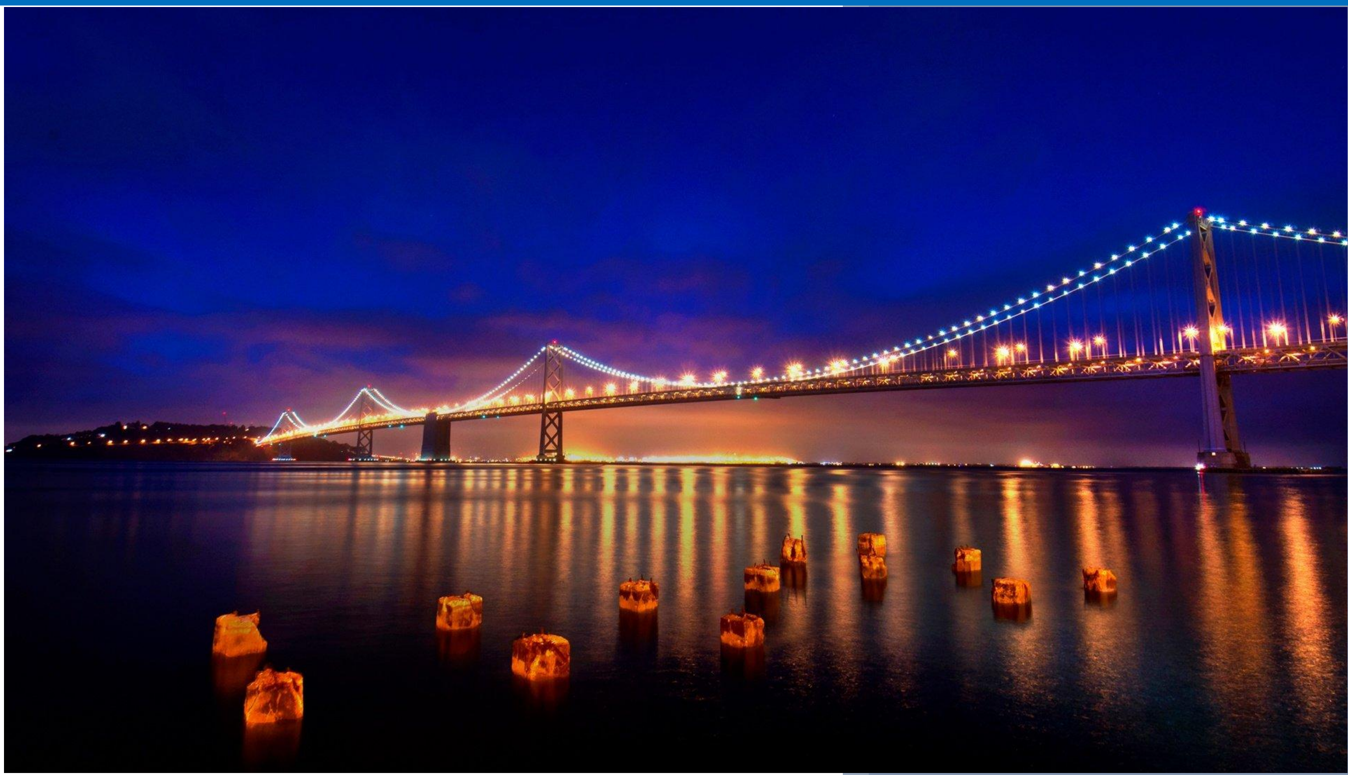
$$f(x)$$

ΠΡΟΤΥΠΟ
ΛΥΚΕΙΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗΣ
ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ένα σημαντικό πρόβλημα της Ανάλυσης



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

2016 - 2017

Ομάδα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών – Προβλημάτων

Τζελέπης Αλκιβιάδης

Μανιατοπούλου Αμαλία

Αλεξόπουλος Ιωάννης

Μία εικόνα μας κρατάει φυλακισμένους και δεν μπορούμε να βγούμε έξω απ΄ αυτήν, γιατί βρίσκεται μες στη γλώσσα μας και η γλώσσα μοιάζει να μας την επαναλαμβάνειαδυσώπητα.

Ludwig Wittgenstein

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ τάξης του Λυκείου (θετικού προσανατολισμού) και στους συναδέλφους μαθηματικούς. Έχει ως θέμα του την εύρεση συνάρτησης, ένα θεωρητικό ζητούμενο το οποίο διατρέχει ολόκληρη τη σχολική ύλη. Δίδεται αναλυτικά και συμπληρώνεται όπου είναι απαραίτητο η απαιτούμενη θεωρία, πλαισιωμένη με λυμένα παραδείγματα. Η ανάπτυξη του θέματος γίνεται με τρόπο που προσεγγίζει την ανάγκη της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού μέσα στη σχολική τάξη. Όλα τα ανωτέρω κατανέμονται σε οκτώ κεφάλαια και τρία παραρτήματα.

Το 1ο Κεφάλαιο – ***Γενικά Περί Συναρτήσεων*** – διαπραγματεύεται την εύρεση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον ορισμό, τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων και τις βασικές ιδιότητες της έννοιας της συνάρτησης. Στο θεωρητικό μέρος του κεφαλαίου γίνεται η προσπάθεια να αποσαφηνισθεί η διαφοροποίηση των συναρτήσεων από τα πολυώνυμα και τους πραγματικούς αριθμούς. Η αυστηρότερη θεωρητική θεμελίωση των ανωτέρω δίδεται στο Παράρτημα Β, κάτι που προφανώς αφορά μόνο στους εκπαιδευτικούς.

Στο 2ο Κεφάλαιο – ***Συνέχεια και Εύρεση Συνάρτησης*** – χρησιμοποιείται ο ορισμός της συνέχειας, τα θεωρήματα, τα πορίσματα και οι ιδιότητες που απορρέουν από αυτήν για να βρεθούν οι ζητούμενες συναρτήσεις. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται σε παραδείγματα εύρεσης συναρτήσεων που συνδέουν τα δύο πρώτα κεφάλαια, όταν η μοναδική διαφορά που υπάρχει είναι η συνέχεια.

Στο 3ο Κεφάλαιο – ***Εύρεση Αρχικής Συνάρτησης*** – χρησιμοποιούνται τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού για την εύρεση συναρτήσεων, οι οποίες είναι σαφώς λιγότερες αλλά με “καλύτερες” ιδιότητες. Στο θεωρητικό μέρος του κεφαλαίου αναδεικνύεται η λογική πορεία των θεωρημάτων με αφετηρία το Θεώρημα του Fermat και φυσιολογική συνέχεια τα Θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και τις συνέπειές του, το Θ. Μ. Τ. του Cauchy, τα Θεωρήματα Αρχικών Συναρτήσεων και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Στο σημείο αυτό δίδονται επιπρόσθετα οι αποδείξεις των θεωρημάτων που αφενός συμπληρώνουν το σχολικό βιβλίο αφετέρου αναδεικνύουν τη συνέχεια των μαθηματικών εννοιών.

Στο $4^{ο}$ Κεφάλαιο – ***Διαφορικές Εξισώσεις*** – αναλύεται το θεωρητικό πλαίσιο των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών, $1^{ης}$ τάξης ομογενών, γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης (ακριβείς και μη ακριβείς, ομογενείς και μη ομογενείς) και δύο ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων $2^{ης}$ τάξης. Επιπροσθέτως, σε κάθε περίπτωση, λύνονται παραδείγματα προσαρμοσμένα στη σχολική ύλη. Σκοπός του κεφαλαίου είναι να καταδειχθεί ότι δεν υπάρχει ανάγκη εκμάθησης τεχνασμάτων ανά περίπτωση, αντιθέτως είναι αναγκαία η καλή γνώση της απαραίτητης θεωρίας.

Το $5^{ο}$ Κεφάλαιο – ***Ολοκληρωτικές Εξισώσεις*** – διαπραγματεύεται τις εξισώσεις Fredholm και Volterra, μορφές εξισώσεων που περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση, την οποία θέλουμε να προσδιορίσουμε, μέσα σε ένα ολοκλήρωμα. Στην παρούσα χρονική συγκυρία εντός σχολικής ύλης είναι μόνο οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm (όπου τα άκρα ολοκλήρωσης είναι σταθερά).

Στο $6^{ο}$ Κεφάλαιο – ***Προβλήματα*** – επιλύονται μία σειρά από προβλήματα κυρίως από την Φυσική, αλλά και από τις επιστήμες της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Κοινωνιολογίας. Ο Απειροστικός Λογισμός είναι ο κατεξοχήν κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τη μοντελοποίηση προβλημάτων μέσω κατάλληλων συναρτήσεων οι οποίες προφανώς πρέπει να αναζητηθούν.

Το $7^{ο}$ Κεφάλαιο – ***Επαναληπτικές Ασκήσεις*** – περιέχει ασκήσεις από όλη την ύλη, οι οποίες έχουν ως αφετηρία το πρόβλημα εύρεσης συνάρτησης, συνδυάζοντας διάφορες μορφές του. Με την ευκαιρία αυτή αναδεικνύονται βασικές έννοιες και προτάσεις της Ανάλυσης.

Στο $8^{ο}$ Κεφάλαιο – ***Θέματα Εξετάσεων*** – έχουν συγκεντρωθεί και επιλυθεί όλα τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων (κανονικών και επαναληπτικών) που αφορούν στο ζήτημα εύρεσης συνάρτησης. Τα θέματα αυτά άλλωστε ήταν η αφορμή για τη δημιουργία του παρόντος βιβλίου.

Στα τρία παραρτήματα γίνεται αναφορά σε θέματα που ξεφεύγουν της ύλης του σχολικού βιβλίου, θεωρούμε όμως ότι συμπληρώνουν την εικόνα που πρέπει να έχει ένας Μαθηματικός αναφορικά με τα ζητήματα που διαπραγματεύεται το βιβλίο.

Στο Παράρτημα Α – ***Ορθογώνιες Τροχιές*** – λύνονται κάποια ενδιαφέροντα προβλήματα με αναφορές και στις κωνικές τομές. Παρενθετικά, στο $6^{ο}$ Κεφάλαιο με τα προβλήματα δόθηκε μία άσκηση που διαμορφώθηκε από τις ορθογώνιες τροχιές.

Στο Παράρτημα Β – ***Θεωρία Ομάδων*** – δίνονται οι απαιτούμενοι ορισμοί και προτάσεις για να αποσαφηνισθεί ο λόγος για τον οποίο δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο οι πραγματικοί αριθμοί, οι συναρτήσεις και τα πολυώνυμα.

Στο Παράρτημα Γ δίνεται η θεωρία επίλυσης για τις ***Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις*** $\boldsymbol{2^{ης}}$ ***τάξης με σταθερούς συντελεστές.***

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο:

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ο προσδιορισμός μίας συνάρτησης μέσω μίας συναρτησιακής σχέσης χωρίς να δίνονται επιπλέον δεδομένα μπορεί να φαίνεται ότι είναι μία απλή διαδικασία, αρκετά συχνά όμως κρύβει «παγίδες» κυρίως όταν αντιμετωπίζεται ως επίλυση μίας απλής αλγεβρικής εξίσωσης.

1. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^3(x) + x^3 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + x^3 = 1 \Leftrightarrow f^3(x) = 1 - x^3$.

Οπότε $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x^3}, & x < 1 \\ -\sqrt[3]{x^3-1}, & x > 1 \end{cases}$.

2. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x-y) = f(x) \cdot f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x-y) = f(x) \cdot f(y) \quad (1)$

Αν θέσουμε, στην σχέση (1), όπου $x = y = 0$ έχουμε:

$$f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1.$$

i) Ας υποθέσουμε ότι $f(0) = 0$.

Αν θέσουμε, στην σχέση (1), όπου $y = 0$ έχουμε:

$$f(x) = f(x) \cdot f(0) \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως μία από τις ζητούμενες συναρτήσεις είναι η:

$$f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ii) Ας υποθέσουμε ότι $f(0)=1$.

Αν θέσουμε στη σχέση (1), όπου y το x έχουμε:

$$f(0)=f^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)=1.$$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^2(x)\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$.

Αν θέσουμε στη σχέση (1), όπου y το $\frac{x}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)(f(x)-1)=0 \xLeftrightarrow{f\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0} f(x)=1.$$

Επομένως η δεύτερη συνάρτηση που προκύπτει είναι η:

$$f(x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=0$ και $f(x)=1$ επαληθεύουν τη σχέση (1), επομένως είναι οι ζητούμενες συναρτήσεις.

3. Να βρεθούν συναρτήσεις f, τέτοιες ώστε: $x^2+f^2(x)=1$.

<u>Λύση</u>

$$x^2+f^2(x)=1 \;\Leftrightarrow\; f^2(x)=1-x^2 \quad (1)$$

Πρέπει: $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1).

Για παράδειγμα οι

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1,1],$$

$$f(x)=-\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1,1],$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0]\\ -\sqrt{1-x^2}, & x\in(0,1]\end{cases},\ \text{κ.λ.π.}$$

4. (Άσκηση 6 / Β΄ ΟΜΑΔΑΣ, § 1.2 σχολικού βιβλίου)

Να βρεθεί συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- $(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|,\ x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

<u>Λύση</u>

$$(gof)(x) = \sqrt{1 - f^2(x)} \Rightarrow$$

$$|\sigma\upsilon\nu x| = \sqrt{1 - f^2(x)} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - f^2(x) \Rightarrow$$

$$f^2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$$

$$f^2(x) = \eta\mu^2 x.$$

Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις αυτής της μορφής, π.χ.

$$f(x) = \eta\mu x,\ \ x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & x < 0 \\ \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases},\quad f(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & x < 0 \\ \eta\mu x, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\eta\mu x, & x > \pi \end{cases},$$

κ.λ.π.

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</u>

1. Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε δεν είναι κατ΄ανάγκην:

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in A \ \text{ ή } \ g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

Για παράδειγμα δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & x \geq -1 \end{cases}.$$

Τότε ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι δεν ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ισχύει λοιπόν η ακόλουθη πρόταση:

$$\textbf{Αν } \boldsymbol{f(x)\cdot g(x)=0} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A}\textbf{, τότε } \{\boldsymbol{f(x)=0} \textbf{ ή } \boldsymbol{g(x)=0}\} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A}$$

δηλαδή οι τιμές της f ή οι τιμές της g είναι 0 για κάθε $x \in A$,

και όχι:

$$\boldsymbol{f(x)=0} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A} \textbf{ ή } \boldsymbol{g(x)=0} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A,}$$

δηλαδή ότι μία από τις δύο συναρτήσεις είναι η μηδενική.

Ως γνωστόν ισχύει:

$$f^2(x)=g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x)-g^2(x)=0 \Leftrightarrow \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)=0.$$

Επομένως ισχύει και η ακόλουθη πρόταση:

$$\textbf{Αν } \boldsymbol{f^2(x)=g^2(x)} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A}\textbf{, τότε}$$

$$\{\boldsymbol{f(x)=g(x)} \textbf{ ή } \boldsymbol{f(x)=-g(x)}\} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A,}$$

δηλαδή οι τιμές των δύο συναρτήσεων είναι ίσες ή αντίθετες για κάθε $x \in A$,

και όχι:

$$\{\boldsymbol{f(x)=g(x)} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A}\} \text{ ή } \{\boldsymbol{f(x)=-g(x)} \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x\in A}\}$$

δηλαδή ότι οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες ή αντίθετες.

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A ισχύει η

ισοδυναμία: $\boldsymbol{(f(x))^n=0 \Leftrightarrow f(x)=0}$**, για κάθε** $\boldsymbol{x\in A, n\in\mathbb{N}, n\geq 2}$**.**

Απόδειξη

(Ευθύ): Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in A$, τέτοιο ώστε $f(x_0)\neq 0$. Τότε $(f(x_0))^n \neq 0$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x)=0$ για κάθε $x\in A$.

(Αντίστροφο:) Αν $f(x)=0$, τότε είναι προφανές ότι $(f(x))^n=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο:

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

I. Πρόσημο συνάρτησης:

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$\begin{cases} f \text{ συνεχής σε διάστημα } \Delta \\ \quad\quad \kappa\alpha\iota \\ f(x) \neq 0, \;\; \gamma\iota\alpha \text{ κάθε } \; x \in \Delta \end{cases}$$

τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, δηλαδή:

$f(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$ ή $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Απόδειξη

Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό προσημο στο Δ.

Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, τέτοιοι ώστε $f(x_1)f(x_2) < 0$.

Δηλαδή ισχύουν:

$$\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [x_1, x_2] \subseteq \Delta \\ \quad\quad \kappa\alpha\iota \\ \quad f(x_1)f(x_2) < 0 \end{cases}$$

Επομένως ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και συνεπώς θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Έτσι καταλήγουμε σε **άτοπο**.

Επομένως η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

Σχόλιο. Η εύρεση συγκεκριμμένα του προσήμου της συνάρτησης απαιτεί μία επιπλέον πληροφορία, συνήθως μία τιμή της συνάρτησης ή κάποια άλλη ιδιότητα αυτής.

II. Πρόσημο και ρίζες συνάρτησης:

Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίου ορισμού της.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x) - f(x) - 2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $y = f(x)$ στην δοθείσα σχέση έχουμε $y^2 - y - 2 = 0$.

Η εξίσωση έχει λύσεις $y_1 = -1,\ y_2 = 2$.

Έτσι έχουμε:

$$f^2(x) - f(x) - 2 = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + 1)(f(x) - 2) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\{f(x) = -1 \ \text{ ή } \ f(x) = 2\} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή όλες οι τιμές της συνάρτησης θα είναι το -1 ή το 2. Επομένως το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης θα είναι υποσύνολο του συνόλου $B = \{-1, 2\}$. Γνωρίζουμε όμως ότι μία από τις συνέπειες του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, είναι ότι:

"Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, είναι διάστημα".

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f δεν είναι σταθερή, τότε το Σύνολο Τιμών της $f(\mathbb{R})$ θα είναι διάστημα, το οποίο πρέπει να περιέχεται στο σύνολο B. Αυτό όμως είναι αδύνατο να συμβαίνει διότι το σύνολο $B = \{-1, 2\}$ περιέχει μεμονωμένες τιμές. Επομένως η συνάρτηση f είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή είναι:

$$\{f(x) = -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\} \text{ ή } \{f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

i) $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$

ii) $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ και παρουσιάζουν μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

<u>Λύση</u>

i) Είναι

$$f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Rightarrow f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 1 \Rightarrow$$

$$(f(x) - 1)^2 = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$$

$$(f(x) - 1)^2 = \eta\mu^2 x \Rightarrow$$

$$|f(x) - 1| = |\eta\mu x|.$$

Θέτουμε $g(x) = f(x) - 1$, οπότε είναι: $|g(x)| = |\eta\mu x|$

Η συνάρτηση $\eta\mu x$ έχει ρίζες στο $[0, 2\pi]$ τις $x = 0$, $x = \pi$ και $x = 2\pi$, οι οποίες είναι και ρίζες της $g(x)$, διότι αν υποθέσουμε ότι x_0 μία διαφορετική ρίζα της $g(x)$, τότε για $x = x_0$ είναι $g(x_0) = \eta\mu x_0 = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα $g(x) \neq 0$ για $x \in (0, \pi)$ και $x \in (\pi, 2\pi)$ και αφού η g είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, \pi)$ και $(\pi, 2\pi)$.

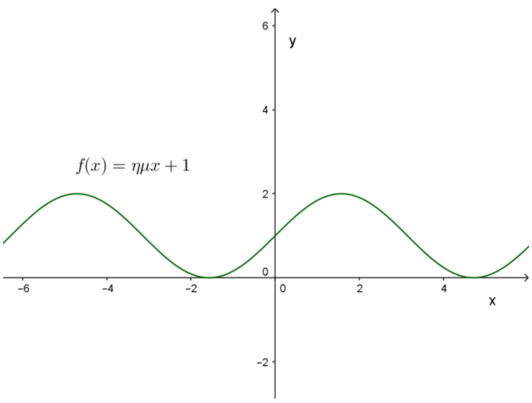
Δηλαδή:

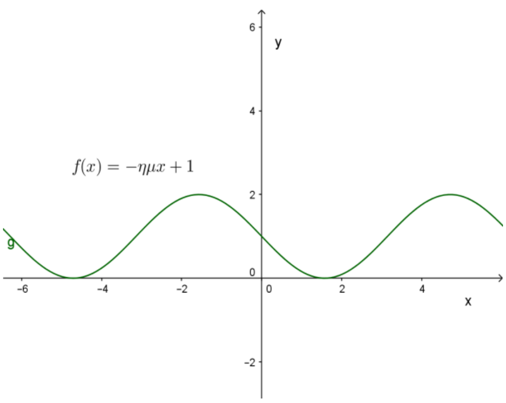
$$g(x) = \eta\mu x, \quad x \in [0, 2\pi] \qquad g(x) = -\eta\mu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$g(x) = |\eta\mu x|, \quad x \in [0, 2\pi] \qquad g(x) = -|\eta\mu x|, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Τελικά είναι:

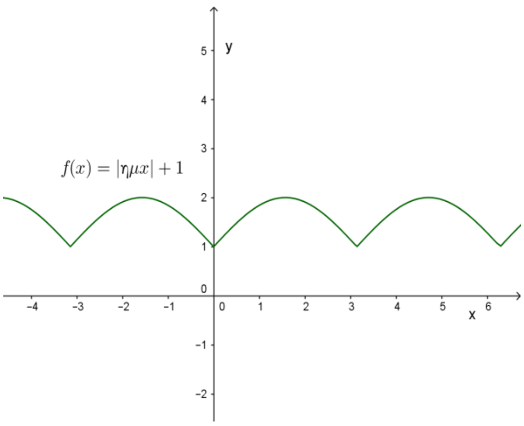
$$f(x) = \eta\mu x + 1, \quad x \in [0, 2\pi] \qquad f(x) = -\eta\mu x + 1, \quad x \in [0, 2\pi]$$

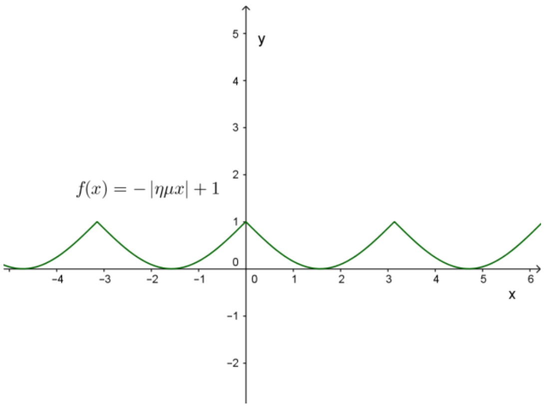




$$f(x) = |\eta\mu x| + 1 \ \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\eta\mu x + 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) = -|\eta\mu x\,| + 1 \ \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\eta\mu x + 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ \eta\mu x + 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$





ii) Αφού η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$, από το προηγούμενο ερώτημα θα είναι:

$$f(x) = \eta\mu x + 1 \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\eta\mu x + 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

3. Να βρεθεί <u>συνεχής</u> συνάρτηση f ορισμένη στο $[-\pi,\ \pi]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ και τέτοια, ώστε:

- $(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|, x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

<u>Λύση</u>

$$(gof)(x) = \sqrt{1 - f^2(x)} \Rightarrow$$

$$|\sigma\upsilon\nu x| = \sqrt{1 - f^2(x)} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - f^2(x) \Rightarrow$$

$$f^2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x.$$

Για τις ρίζες της f ισχύει ότι:

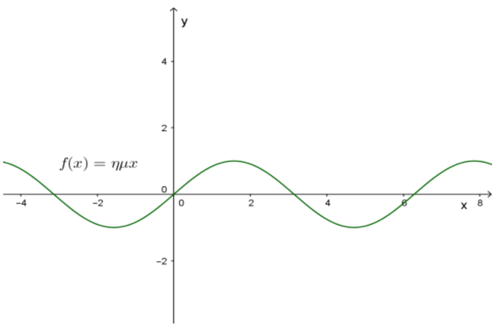
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = -\pi \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = \pi.$$

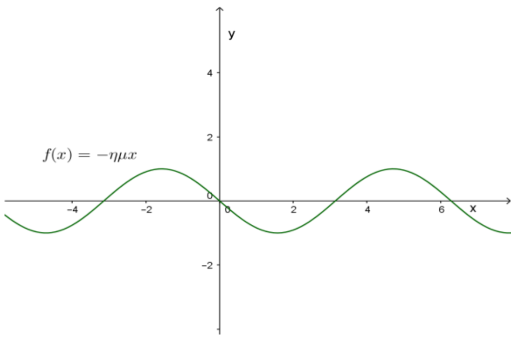
Η f ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0,\ \pi)$, δηλαδή $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ στο $(-\pi, 0)$ και στο $(0,\ \pi)$. Επομένως:

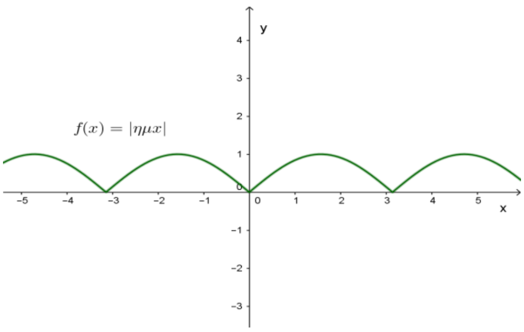
$$f(x) = \eta\mu x, \quad f(x) = -\eta\mu x,$$

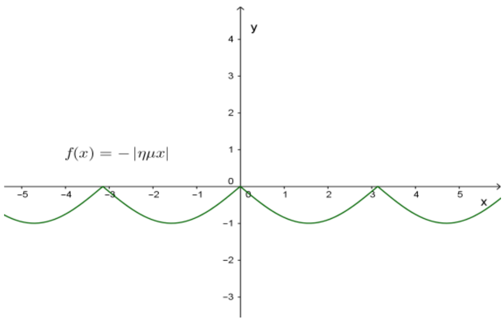
$$f(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & -\pi \le x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \eta\mu x, & 0 < x \le \pi \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & -\pi \le x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\eta\mu x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα $f(x) = \eta\mu x$.









ΚΕΦΑΛΑΙΟ $3^{ο}$:

ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Το συνηθέστερο γενικά και το απλούστερο είναι με βάση κάποιες πληροφορίες για τη συνάρτηση f να παίρνουμε πληροφορίες για την παράγωγο της f'. Υπάρχει όμως ένα θεώρημα που έχει τόσο ισχυρή πληροφορία, έτσι ώστε να μπορούμε να κινηθούμε και προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Η απόδειξη του θεωρήματος Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) βασίζεται σε μία ειδική περίπτωσή του, το θεώρημα του Rolle, το οποίο με τη σειρά του αποδεικνύεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Fermat. Αξίζει να σχολιασθεί, επίσης, ότι και το θεώρημα του Fermat μας δίνει πληροφορίες για την συνάρτηση f (κρίσιμα σημεία) αν γνωρίζουμε πληροφορίες για την παράγωγο της f'. Τέλος, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. αποδεικνύεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy, το οποίο εκτός από μία πολύ καλή θεωρητική άσκηση, είναι το βασικό εργαλείο που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε τα θεωρήματα των κανόνων του L' Hospital.

1. Το Θεώρημα του Fermat

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη σε διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$, τέτοια ώστε:

- x_0 εσωτερικό σημείο του Δ,
- Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0,
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0,

τότε $f'(x_0) = 0$.

<u>Απόδειξη</u>: Σχολικό βιβλίο, παράγραφος 2.7, «Τοπικά ακρότατα συνάρτησης».

2. Το Θεώρημα του Rolle

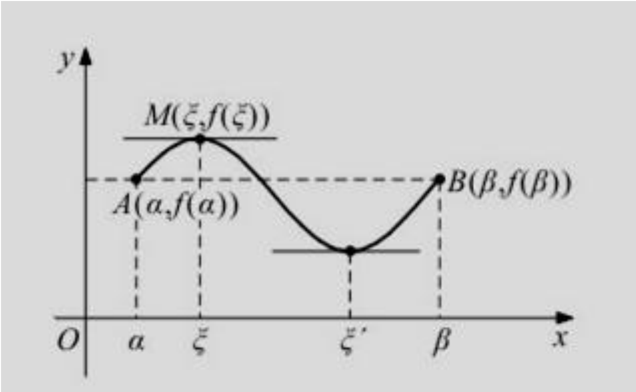
Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β].
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β).

- $f(\alpha) = f(\beta)$,

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Σχόλιο. Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

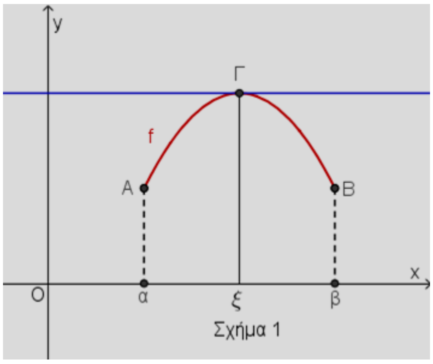


Γεωμετρική Ερμηνεία του θεωρήματος Rolle:

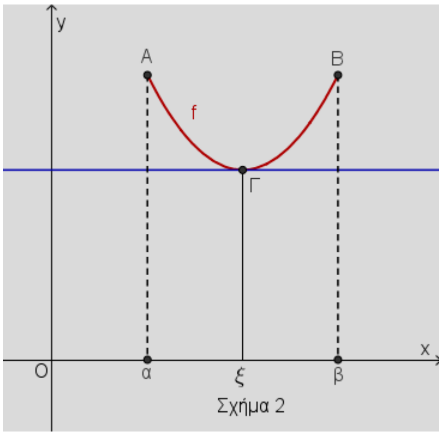
Αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η ευθεία που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

<u>Απόδειξη</u>:

Είναι γνωστό από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα [α, β] έχει μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.



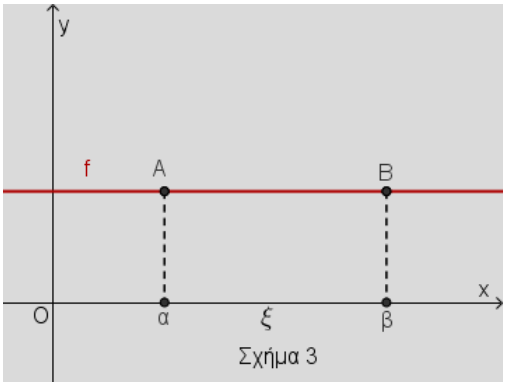
Ας υποθέσουμε αρχικά ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε το $f(\xi)$ να είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Τότε όμως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat. Επομένως ισχύει $f'(\xi) = 0$ (Σχήμα 1).



Αν τώρα υποθέσουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε το $f(\xi)$ να είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης, τότε ικανοποιούνται εκ νέου οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat. Επομένως ισχύει

$f'(\xi) = 0$ (Σχήμα 2).

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή παίρνονται και οι δύο στα άκρα του διαστήματος. Αφού όμως $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή συμπίπτουν, επομένως η συνάρτηση f είναι σταθερή συνάρτηση και για μία σταθερή συνάρτηση μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε $\xi \in (\alpha, \beta)$ (Σχήμα 3).



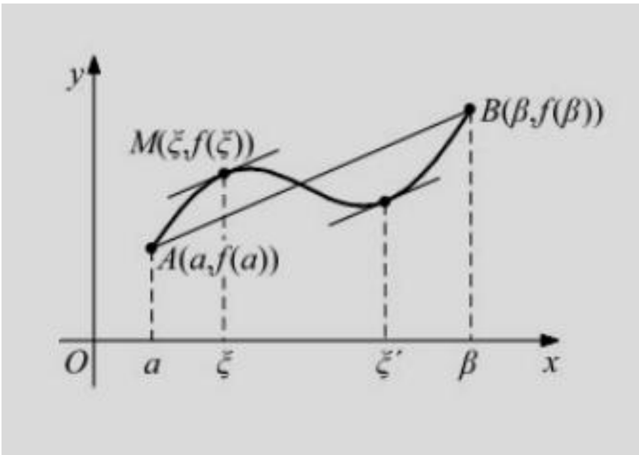
Σχήμα 3

3. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β],
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β),

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.



Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. :

Αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η ευθεία που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, όπου

$A(a, f(a))$, $B(\beta, f(\beta))$.

<u>Απόδειξη</u>:

Για να αποδείξουμε το Θ.Μ.Τ. θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Rolle σε μία επιλεγμένη συνάρτηση, η οποία μπορεί να αναζητηθεί στην προς απόδειξη σχέση:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha} = 0.$$

Μία προφανής επιλογή θα μπορούσε να είναι η $g(x) = f(x) - \left[\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha}\right] \cdot x$, η οποία και επιλύει το πρόβλημα.

Παρόλα αυτά θα προτιμήσουμε* την:

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha}\right](x - \alpha) - f(a)$$

- Η h είναι προφανώς συνεχής στο [α, β],
- και παραγωγίσιμη στο (α, β) με:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha}.$$

- Επιπλέον είναι:

$$h(a) = 0$$

$$h(\beta) = f(\beta) - \left[\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha}\right](\beta - \alpha) - f(a) = 0.$$

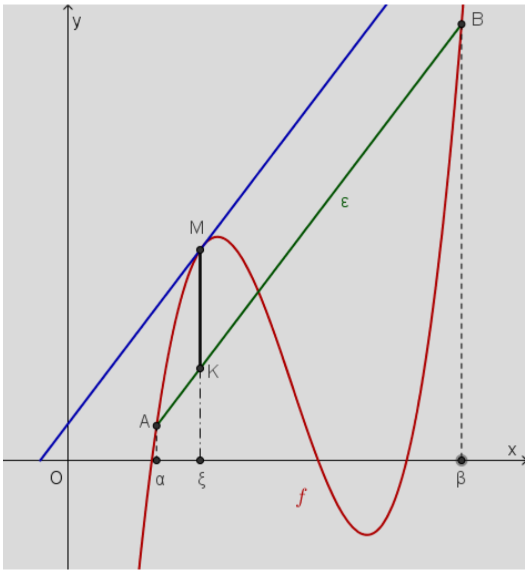
Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle και ως εκ τούτου υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha} = 0.$$

Δηλαδή:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha}.$$

*__Σχόλιο.__ Η συνάρτηση h εκφράζει το μήκος του κατακόρυφου τμήματος MK, το οποίο είναι η διαφορά μεταξύ του $f(x)$ και του ύψους (στο σημείο ξ), της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B.



Παρατήρηση. Είναι προφανές λοιπόν ότι οι πληροφορίες της παραγώγου μιας συνάρτησης μας επιτρέπουν να πάρουμε πληροφορίες για την ίδια την συνάρτηση. Επομένως το ερώτημα που τίθεται, είναι με ποιόν τρόπο μπορούμε να κινηθούμε προς την αντίθετη κατεύθυνση; Πριν προχωρήσουμε στα πορίσματα του Θ.Μ.Τ. που αφορούν στην εύρεση αρχικών συναρτήσεων, θα δούμε τρία προβλήματα που καταδεικνύουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουμε.

Πρόβλημα 1^{o}. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και οι συναρτήσεις:

$$F(x) = f(\alpha)x + e^{\alpha} \text{ και } G(x) = f(\beta)x + e^{\beta},\ \alpha < \beta$$

για τις οποίες ισχύει ότι $F \circ G = G \circ F$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - f'(\xi) = 1$.

<u>Λύση</u>

Αρχικά εργαζόμαστε με σκοπό να δημιουργήσουμε μία χρησιμότερη σχέση, η οποία θα μας βοηθήσει στην επίλυση της εξίσωσης $f(x) - f'(x) = 1$.

Επειδή οι συναρτήσεις F και G έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$F \circ G = G \circ F \Leftrightarrow F(G(x) = G\big(F(x)\big), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)\big[f(\beta)x + e^{\beta}\big] + e^{\alpha} = f(\beta)[f(a)x + e^{\alpha}] + e^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)x + f(\alpha)e^{\beta} + e^{\alpha} = f(\beta)f(a)x + f(\beta)e^{\alpha} + e^{\beta}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει πάντα, αν και μόνο αν:

$$f(\alpha)e^{\beta} + e^{\alpha} = f(\beta)e^{\alpha} + e^{\beta} \quad (1)$$

Για να δημιουργήσουμε τις προϋποθέσεις εφαρμογής του Θ. Rolle, απομονώνουμε το a από το β στα δύο μέλη της ισότητας. Αυτό θα μας βοηθήσει επιπλέον να ανακαλύψουμε τη συνάρτηση για την οποία θα εφαρμόσουμε το θεώρημα.

Η (1) λοιπόν μετασχηματίζεται στην ισοδύναμή της (2):

$$f(\alpha)e^{\beta} - e^{\beta} = f(\beta)e^{\alpha} - e^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$e^{\beta}(f(\alpha) - 1) = e^{\alpha}(f(\beta) - 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha) - 1}{e^{\alpha}} = \frac{f(\beta) - 1}{e^{\beta}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$, $x \in [\alpha, \beta]$ η οποία είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και λόγω της (2) ισχύει ότι $h(a) = h(\beta)$.

Τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ για το οποίο ισχύει:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)e^{\xi} - e^{\xi}[f(\xi) - 1]}{e^{2\xi}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) - [f(\xi) - 1] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) - f'(\xi) = 1.$$

Πρόβλημα 2ο. Δίδεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $f(x) > 0$ για κάθε x στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α, β) τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}.$$

<u>Λύση</u>

Αρχικά εργαζόμαστε επάνω στην τελική ισότητα, με σκοπό να καταλήξει σε μορφή που να είναι ευκολότερη η αναγνώριση της συνάρτησης για την οποία θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. Έτσι έχουμε:

$$ln\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = lne^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \Leftrightarrow lnf(\alpha) - lnf(\beta) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(\alpha - \beta) \quad (1)$$

Η (1) μας δίνει το ερέθισμα να θεωρήσουμε συνάρτηση g με $g(x) = lnf(x)$, για την οποία ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f και lnx.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει ξ στο (α, β), τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{lnf(\alpha) - lnf(\beta)}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow$$

$$lnf(\alpha) - lnf(\beta) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(\alpha - \beta).$$

Πρόβλημα 3ο. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy

Αν οι f, g είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β), τότε υπάρχει ένας αριθμός ξ στο (α, β), τέτοιος ώστε:

$$[f(\beta) - f(a)]g'(\xi) = [g(\beta) - g(a)]f'(\xi)$$

Παρατηρήσεις. Αν $g(\beta) \neq g(a)$ και $g'(\xi) \neq 0$ τότε η ισότητα του θεωρήματος γράφεται ως:

$$\frac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αφενός μεν αν $g(x)=x$ για κάθε x, τότε $g'(x)=1$

και προκύπτει το Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση f.

Αφετέρου δε, αν εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στις f, g ξεχωριστά, βρίσκουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο (α,β) έτσι ώστε:

$$\frac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}=\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}.$$

Δυστυχώς όμως τίποτε δεν εγγυάται ότι τα ξ_1, ξ_2 είναι ίσα μεταξύ τους. Ας προχωρήσουμε όμως στην απόδειξη, όπου θα φανεί η κατάλληλη συνάρτηση που πρέπει να επιλέξουμε.

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $h(x)=f(x)[g(\beta)-g(a)]-g(x)[f(\beta)-f(a)]$.

Τότε η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), με:

$$h'(x)=f'(x)[g(\beta)-g(a)]-g'(x)[f(\beta)-f(a)]$$

και $h(\alpha)=h(\beta)=f(a)g(\beta)-g(a)f(\beta)$.

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle και ως εκ τούτου υπάρχει ένας τουλάχιστον ξ στο (α,β), τέτοιος ώστε $h'(\xi)=0$, δηλαδή:

$$f'(\xi)[g(\beta)-g(a)]-g'(\xi)[f(\beta)-f(a)]=0 \Leftrightarrow$$

$$[f(\beta)-f(a)]g'(\xi)=[g(\beta)-g(a)]f'(\xi).$$

4. Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ,
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη: Σχολικό βιβλίο, παράγραφος 2.6, Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Σχόλια.

1. Δηλαδή $f(x) = c$, (c σταθερά) για κάθε x στο Δ. Αυτό σημαίνει ότι με τη βοήθεια του θεωρήματος (και κατάλληλης συνθήκης) μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση f.

2. ***Γεωμετρική Ερμηνεία***: Η μόνη συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κάθε σημείο της, είναι η σταθερή.

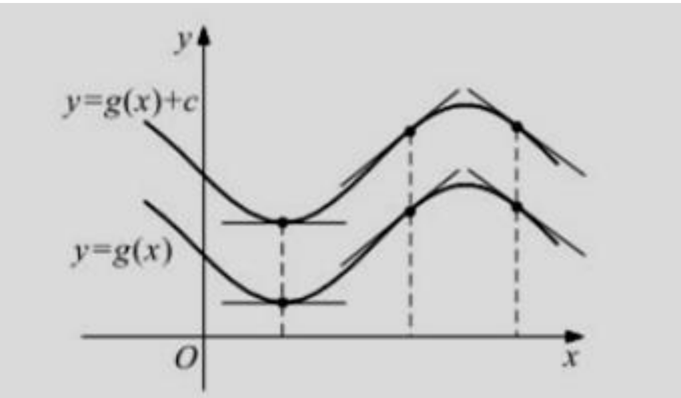
3. Ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ,
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε x στο Δ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.



Απόδειξη: Σχολικό βιβλίο, παράγραφος 2.6, Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Σχόλια:

1. Το Πόρισμα χρησιμοποιείται για την επίλυση απλών διαφορικών εξισώσεων. Εξισώσεων στις οποίες ο άγνωστος είναι μία συνάρτηση και στις οποίες υπάρχει τουλάχιστον η πρώτη παράγωγός της.

2. ***Γεωμετρική Ερμηνεία***: Αν οι δύο συναρτήσεις έχουν σε κάθε σημείο τους με την ίδια τετμημένη, εφαπτόμενες παράλληλες, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις είναι

"παράλληλες ", δηλαδή η μία προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης κατά c και με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μία οικογένεια συναρτήσεων.

3. Ισχύει και το αντίστροφο του Πορίσματος.

4. Το Θεώρημα και το Πόρισμα δεν ισχύουν σε ένωση διαστημάτων, όπως δείχνει το αντιπαράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$$

με $f'(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ενώ $f(x) \neq c$.

5. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική συνάρτηση, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

6. Τέλος, αποδεικνύεται ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν αρχική συνάρτηση.

Στη συνέχεια δίδεται ένας πίνακας αρχικών συναρτήσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συνάρτηση f	Αρχικές συναρτήσεις της f
1. $f(x) = 0$	$F(x) = c$, όπου c σταθερά
2. $f(x) = 1$	$F(x) = x + c$
3. $f(x) = \kappa, \kappa \neq 0$	$F(x) = \kappa\, x + c$
4. $f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$
$f(x) = \kappa x + \lambda$	$F(x) = \frac{\kappa}{2}x^2 + \lambda\, x + c$
5. $f(x) = x^\nu, \nu \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$
$f(x) = (\kappa x + \lambda)^\nu$	$F(x) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{(\kappa x+\lambda)^{\nu+1}}{\nu+1} + c$
$f(x) = g'(x) \cdot g(x)^\nu$	$F(x) = \frac{[g(x)]^{\nu+1}}{\nu+1} + c$
6. $f(x) = x^r, r \neq -1, x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
7. $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$F(x) = ln\vert x\vert + c$
$f(x) = \frac{1}{\kappa x+\lambda}$	$F(x) = \frac{1}{\kappa} \cdot ln\vert\kappa\, x + \lambda\vert + c$
$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$F(x) = ln\vert g(x)\vert + c$
8. $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = e^{\kappa x+\lambda}$	$F(x) = \frac{1}{\kappa} \cdot e^{\kappa x+\lambda} + c$
$f(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$	$F(x) = e^{g(x)} + c$
9. $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$	$F(x) = \frac{\alpha^x}{ln\alpha} + c$
$f(x) = \alpha^{\kappa x+\lambda}$	$F(x) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\alpha^{\kappa x+\lambda}}{ln\alpha} + c$
$f(x) = g'(x) \cdot \alpha^{g(x)}$	$F(x) = \frac{\alpha^{g(x)}}{ln\alpha} + c$

10. $\boldsymbol{f(x) = g'(x) \cdot \eta\mu(g(x))}$	$\boldsymbol{F(x) = -\sigma\upsilon\nu(g(x)) + c}$
11. $\boldsymbol{f(x) = g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(g(x))}$	$\boldsymbol{F(x) = \eta\mu(g(x)) + c}$
12. $\boldsymbol{f(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 g(x)}}$	$\boldsymbol{F(x) = \varepsilon\varphi(g(x)) + c}$
13. $\boldsymbol{f(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{\eta\mu^2 g(x)}}$	$\boldsymbol{F(x) = -\sigma\varphi(g(x)) + c}$
14. $\boldsymbol{f(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)}$	$\boldsymbol{F(x) = h(x) \cdot g(x) + c}$
15. $\boldsymbol{f(x) = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g^2(x)}}$	$\boldsymbol{F(x) = \frac{h(x)}{g(x)} + c}$
16. $\boldsymbol{f/\Delta}$ **συνεχής,** $\boldsymbol{\alpha \in \Delta}$	$\boldsymbol{F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, x \in \Delta}$

5. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Η ολοκλήρωση της θεωρίας εύρεσης αρχικών συναρτήσεων γίνεται στο 3^{o} Κεφάλαιο του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Συνοπτικά λοιπόν έχουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

  $$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ, και

- κάθε άλλη παράγουσα G της F στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \Delta$$

είναι μία παράγουσα της f στο Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = [G(t)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha).$$

Σχόλιο. Το Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού είναι το θεώρημα εκείνο που μπορεί να μας βοηθήσει στον υπολογισμό αρχικών συναρτήσεων, κάνοντας χρήση όλων των μεθόδων ολοκλήρωσης, αντικατάσταση – κατά παράγοντες ολοκλήρωση, και των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος.

- **Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,g(x)dx,$$

  όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις $[\alpha, \beta]$.

- **Η ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du$$

  όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(\beta)$.

6. Εφαρμογές – Ασκήσεις

1. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με:

$$f(x) = -\frac{x \cdot f'(x)}{2} \cdot lnx, \quad x \in (1, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)ln^2x$ είναι σταθερή για κάθε $x > 1$.

β) Αν $f(e) = 3$ να βρείτε τον τύπο της f.

<u>Λύση</u>

α) Η g είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = f'(x)ln^2x + 2f(x)\frac{lnx}{x} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = f'(x)ln^2x - f'(x)ln^2x \Leftrightarrow$$

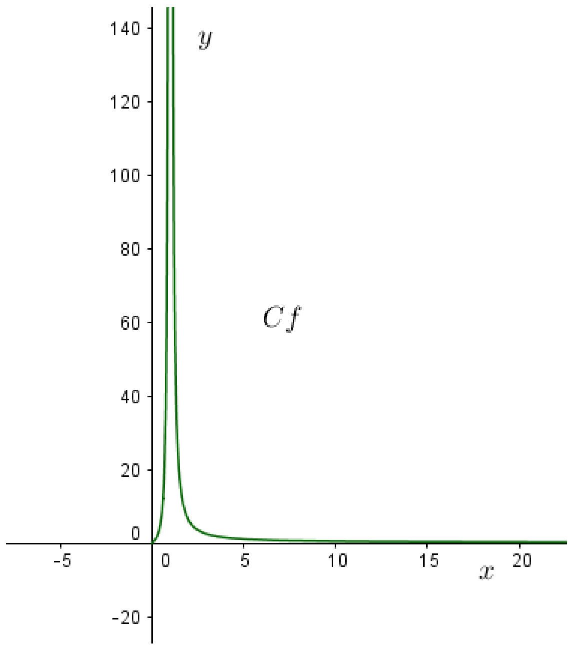
$$g'(x) = 0, \quad x > 1.$$

Επομένως $g(x) = c, x > 1$.

β) Αφού $g(x) = c$, έχουμε ότι $f(x)ln^2x = c, x > 1 \quad (1)$

Για $x = e$ η (1) γίνεται $f(e) = c \Rightarrow c = 3$.

Έτσι από την (1) προκύπτει ότι $f(x) = \frac{3}{ln^2x}, x \in (1, +\infty)$.



2. Δίνεται η συνάρτηση:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $|f(x) - f(\psi)| \leq |x - \psi|^3$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Έστω τυχαίο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^3$.

Για $x \neq x_0$ ισχύει: $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow -|x - x_0|^2 \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq |x - x_0|^2$.

Σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής, επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^2 = 0$ έπεται ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$, άρα και σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ και μάλιστα ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

3. Να βρεθούν οι αρχικές συναρτήσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) Αν $f'(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$.

<u>Λύση</u>

Είναι (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 8β):

$$f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'.$$

Άρα $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c$ και αφού $f(0) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$, προκύπτει η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Αν $f'(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Είναι (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 7γ):

$$f'(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 4} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 4)'}{x^2 + 4} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 4)\right)'.$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 4) + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

γ) Αν $f'(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, με $f(0) = 0$.

<u>Λύση</u>

Είναι (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 7γ):

$$f'(x) = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(-ln(\sigma\upsilon\nu x)\right)'.$$

Άρα $f(x) = -ln(\sigma\upsilon\nu x) + c$ και αφού $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, προκύπτει η συνάρτηση:

$$f(x) = -ln(\sigma\upsilon\nu x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

δ) Αν $f'(x) = \frac{1}{xlnx}$, $x > 1$ με $f(e) = 2$.

<u>Λύση</u>

Είναι (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 7γ):

$$f'(x) = \frac{1}{xlnx} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{lnx} \Leftrightarrow$$

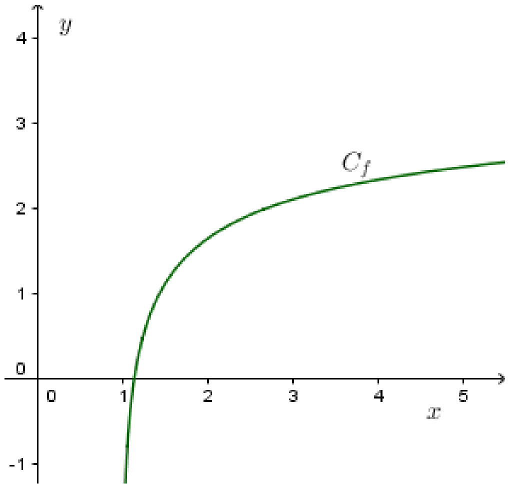
$$f'(x) = \frac{(lnx)'}{lnx} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (ln|lnx|)' \xLeftrightarrow{x>1 \Rightarrow lnx>0}$$

$$f'(x) = (\ln(lnx))'.$$

Άρα $f(x) = \ln(lnx) + c$ και αφού $f(e) = 2 \Rightarrow c = 2$, προκύπτει η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(lnx) + 2, \quad x > 1.$$



ε) Αν $f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x,\, x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Είναι (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 14):

$$f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x) = (x)'\eta\mu x + x(\eta\mu x)' \Leftrightarrow f'(x) = (x\eta\mu x)'.$$

Άρα:

$$f(x) = x\eta\mu x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

στ) Αν $f'(x) = \frac{1-\,lnx}{x^2},\, x > 0$ με $f(1) = 1$.

<u>Λύση</u>

Είναι (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 15):

$$f'(x) = \frac{1-\,lnx}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(lnx)'x - (x)'lnx}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{lnx}{x}\right)'.$$

Άρα $f(x)=\frac{lnx}{x}+c$ και αφού $f(1)=1 \Rightarrow c=1$, προκύπτει η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{lnx}{x}+1, \quad x>0.$$

Σχόλιο. Περισσότερο σύνθετες περιπτώσεις θα αναπτυχθούν στο Κεφάλαιο του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

4. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$, με:

$$f'(x^3)=x \text{ και } f(1)=2.$$

Να υπολογίσετε την τιμή $f(3)$.

<u>Λύση</u>

Καταρχάς προσπαθούμε να δημιουργήσουμε τις προϋποθέσεις εφαρμογής του πορίσματος εύρεσης αρχικών συναρτήσεων. Έτσι, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσης ισότητας με την $(x^3)'=3x^2$ (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 5γ) και έχουμε:

$$3x^2f'(x^3)=3x^3 \Leftrightarrow \big(f(x^3)\big)'=\left(\frac{3}{4}x^4\right)' \Leftrightarrow f(x^3)=\frac{3}{4}x^4+c.$$

Έτσι για $x=1$, έχουμε ότι $f(1)=\frac{3}{4}+c \Rightarrow c=\frac{5}{4}$.

Οπότε $f(x^3)=\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{4}$ και για $x=\sqrt[3]{3}$ έχουμε: $f(3)=\frac{3}{4}(\sqrt[3]{3})^4+\frac{5}{4}$.

5. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)e^{f(x)}=2x+1, x>0$
- η γραφική παράσταση της f δέχεται στο σημείο $x_0=1$ εφαπτομένη με κλίση $\lambda=\frac{3}{5}$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

<u>Λύση</u>

Είναι (βλ. Πίνακα Αρχικών Συναρτήσεων 8γ):

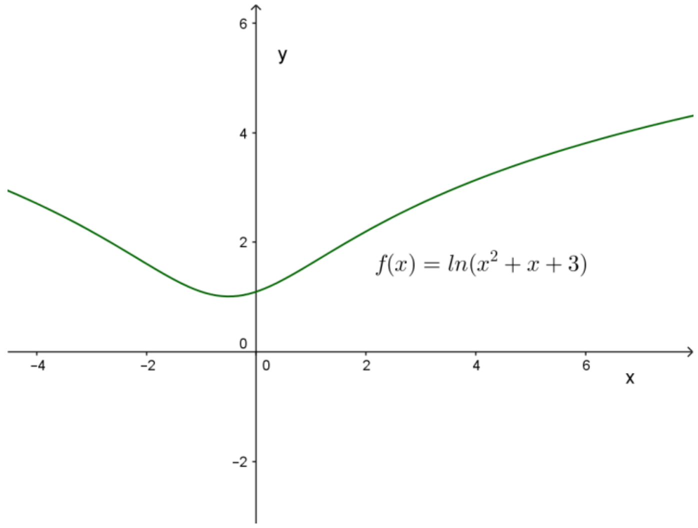
$$f'(x)e^{f(x)} = 2x+1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = (x^2+x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2+x+c \quad (1)$$

Αφού η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει κλίση $\frac{3}{5}$, θα είναι $f'(1) = \frac{3}{5}$.

Για $x = 1$ προκύπτει ότι $f'(1)e^{f(1)} = 3 \Rightarrow \frac{3}{5}e^{f(1)} = 3 \Rightarrow e^{f(1)} = 5$.

Από την (1) για $x = 1$ προκύπτει ότι $e^{f(1)} = 2 + c \Rightarrow c = 3$.

Άρα $e^{f(x)} = x^2 + x + 3 \xRightarrow[x^2+x+3>0]{} f(x) = \ln(x^2+x+3)$.



6. Έστω συνάρτηση f με $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, αρχικά, αρκεί να αποδείξουμε ότι η g είναι σταθερή συνάρτηση και στη συνέχεια ότι η $g(x) = 0$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$g'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' + f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1\ +\ \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1\ +\ x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1+\ x^2} + \frac{1}{1\ +\ x^2} = -\frac{1}{1\ +\ x^2} + \frac{1}{1\ +\ x^2} = 0.$$

Επομένως $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον, είναι $g(1) = 2f(1) = 0$.

Άρα προκύπτει ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

Παρατήρηση: Αξίζει να σχολιασθεί ότι δεν θα μπορούσε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, γιατί οι αρχικές συναρτήσεις της $\frac{1}{1+x^2}$ δεν διδάσκονται στο Λύκειο.

Παρενθετικά λοιπόν, να πούμε ότι ισχύει:

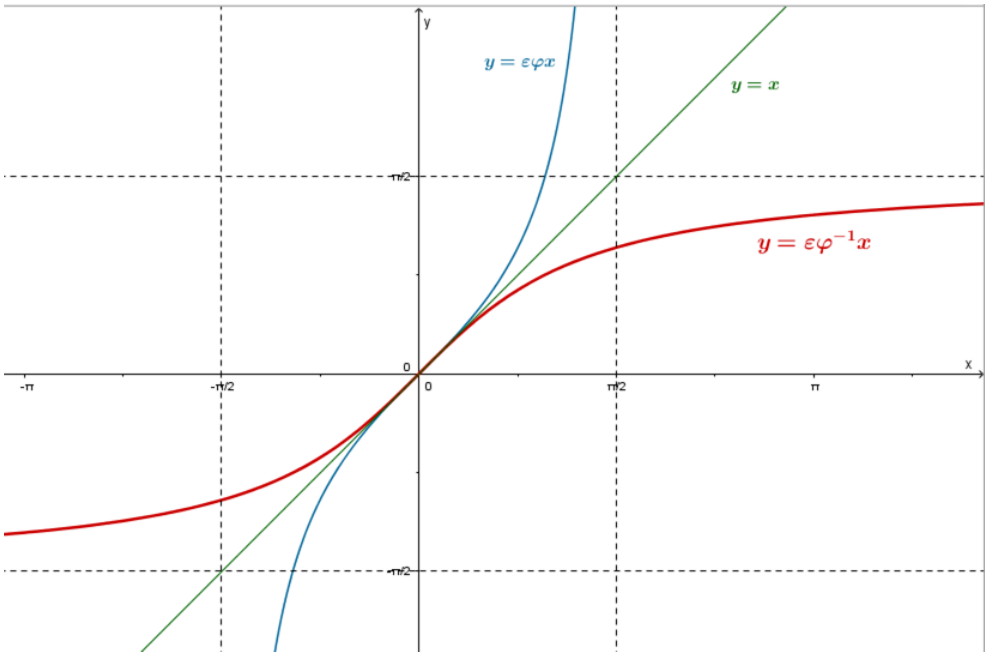
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = τοξεφx + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή οι αρχικές συναρτήσεις της $\frac{1}{1+x^2}$ είναι η οικογένεια των συναρτήσεων της αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης της $εφx$, δηλαδή οι συναρτήσεις $τοξεφx + c$.

Ισχύει δε ότι:

$$y = τοξεφx \Leftrightarrow\ x = εφy, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

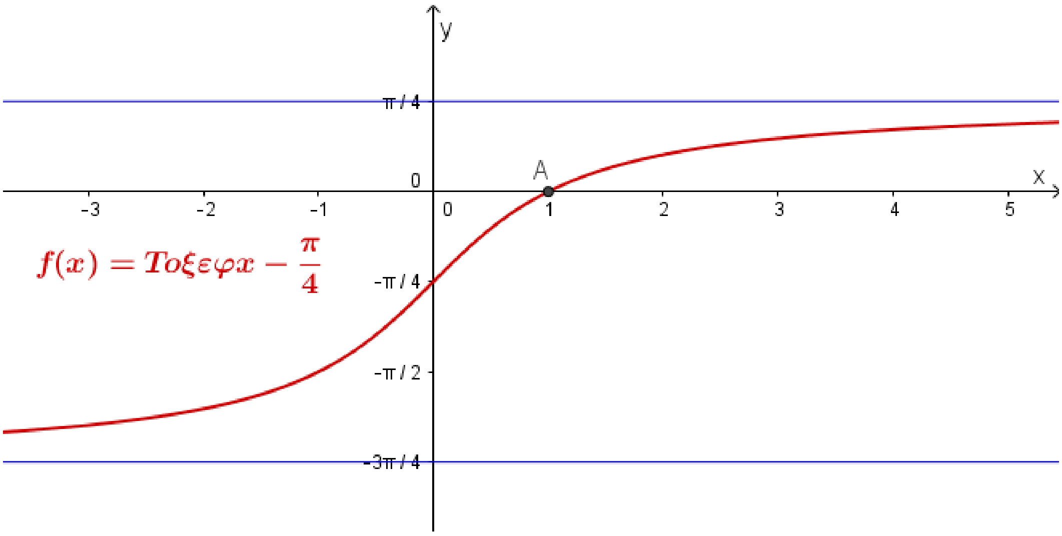
Η γραφική παράσταση της $y = τοξεφx$ είναι η παρακάτω:



Η συνάρτηση που ζητείται εμμέσως στην προηγούμενη άσκηση είναι η:

$$f(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi x - \frac{\pi}{4}$$

με γραφική παράσταση την ακόλουθη



2^{ος} τρόπος επίλυσης:

Είναι $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x > 0$.

Θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$, προκύπτει $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Επομένως έχουμε διαδοχικά

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{1\ +\ x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(-f(x)\right)'$$

Επομένως, υπάρχει $c \in R$ τέτοιο, ώστε $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) + c$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1) = 0$, τότε $c = 0$ και έτσι είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

7. Μια σημαντική διαφορική εξίσωση.

Το πρόβλημα της μεταβολής ενός πληθυσμού.

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι ο ρυθμός μεταβολής ενός πληθυσμού (ο οποίος δεν επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες) τη χρονική στιγμή t, είναι ανάλογος του αριθμού των ατόμων που υπάρχουν την συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αν ο αρχικός αριθμός του πληθυσμού είναι γνωστός, να βρεθεί μία συνάρτηση η οποία θα εκφράζει τον πληθυσμό κάθε χρονική στιγμή.

I. Μοντελοποίηση του προβλήματος:

Θεωρούμε $y = f(t)$ τη ζητούμενη συνάρτηση, η οποία εκφράζει τον πληθυσμό y σε συνάρτηση με τον χρόνο t, $t \geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο πληθυσμός είναι γνωστός και ισούται με $y_0 = f(0)$. Επιπλέον είναι προφανές ότι ισχύει $y = f(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Τότε οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y, \text{ με } y(0) = y_0 \quad (1)$$

$$f'(t) = k \cdot f(t), \text{ με } f(0) = y_0 \quad (2)$$

Όπου k είναι μία σταθερά (η σταθερά αναλογίας), η οποία παίρνει θετικές τιμές αν έχουμε αύξηση του πληθυσμού ή αρνητικές τιμές αν έχουμε μείωση του πληθυσμού.

Η (1) χρησιμοποιεί τον κατά Leibnitz συμβολισμό της παραγώγου.

Η (2) χρησιμοποιεί τον κατά Lagrange συμβολισμό της παραγώγου.

Επομένως αρκεί να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση που προέκυψε.

II. Μία χρήσιμη εφαρμογή του σχολικού βιβλίου:

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή και

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0) = 1$.

1^{ος} τρόπος επίλυσης (του σχολικού βιβλίου):

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^{2x}} = 0.$$

Επομένως, η φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η φ είναι σταθερή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα $\frac{f(x)}{e^x} = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f(x) = ce^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 1$, έχουμε $1 = c$, οπότε:

$$f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2^{ος} τρόπος επίλυσης:

Το ερώτημα που τίθεται όμως, είναι πως θα σκεφθούμε τη βοηθητική συνάρτηση φ και αν μπορούμε να λύσουμε την άσκηση χωρίς αυτήν. Η διατύπωση τότε της άσκησης είναι η ακόλουθη:

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.

Ας υποθέσουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

$$(ln|f(x)|)' = (x)'$$

$$ln|f(x)| = x + c_1$$

$$|f(x)| = e^{x+c_1}$$

$$f(x) = \pm e^{c_1} e^x$$

$$f(x) = c_2 e^x, \text{ όπου } c_2 = \pm e^{c_1} \neq 0.$$

Αν τώρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η εξίσωση. Επομένως η γενική λύση της δ.ε. είναι η:

$$f(x) = ce^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο: Για την πληρότητα της απάντησης, σκόπιμο είναι να ελέγξουμε τι συμβαίνει αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ εκτός ενός τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, σε κάθε ένα από τα διαστήματα αριστερά και δεξιά του x_0 και προκύπτει:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 e^x & x < x_0 \\ c_2 e^x & x > x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}.$$

Επειδή όμως η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0^-} c_1 e^x = \lim_{x \to x_0^+} c_2 e^x = f(x_0) = 0.$$

Επομένως είναι $c_1 = c_2 = 0$ και ως εκ τούτου $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, περιέχεται στη γενική λύση (για $c = 0$).

(Περισσότερο αναλυτικά, βλ. επόμενη παράγραφο "Μία διαφορική εξίσωση – τρία προβλήματα)

<u>3^{ος} τρόπος επίλυσης</u>:

Έχουμε:

$$f'(x) = f(x)$$

$$f'(x) - f(x) = 0.$$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, (βλ. Κεφάλαιο Διαφορικές Εξισώσεις). Ακολουθούμε λοιπόν τα παρακάτω βήματα:

- Μία αρχική συνάρτηση, της συνάρτησης -1, είναι η $A(x) = -x$.
- Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης $I(x) = e^{A(x)} = e^{-x}$.

Έτσι η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0$$

$$(f(x) \cdot e^{-x})' = 0.$$

Επομένως, αν θέσουμε $\varphi(x) = f(x) \cdot e^{-x}$, τότε η φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα $f(x) \cdot e^{-x} = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f(x) = ce^{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 1$, έχουμε $1 = c$, οπότε:

$$f(x) = e^{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο. Είναι πλέον προφανές πώς "ανακαλύπτεται" η βοηθητική συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στον $1^{\text{ο}}$ τρόπο επίλυσης της εξίσωσης.

Παρατήρηση. Αν η διαφορική εξίσωση έχει την γενικότερη μορφή:

$$\boldsymbol{f'(x) = k \cdot f(x), k \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},}$$

τότε ακολουθώντας οποιονδήποτε από τους προηγούμενους τρόπους, προκύπτει ότι η γενική της λύση είναι η:

$$\boldsymbol{f(x) = ce^{kx} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.}$$

ΙΙΙ. Επιστροφή στο πρόβλημα:

Η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε είναι η:

$$f'(t) = k \cdot f(t), \text{ με } f(0) = y_0 \quad (2)$$

Η λύση της είναι λοιπόν η:

$$f(t) = ce^{k\,t} \text{ για κάθε } t \geq 0 \text{ με } y = f(t) > 0.$$

Επειδή $f(0) = y_0$, έχουμε $y_0 = c$, οπότε:

$$f(t) = y_0 e^{k\,t}, \quad t \geq 0.$$

Η ανωτέρω συνάρτηση είναι γνωστή στη βιβλιογραφία, ως ***ο νόμος της εκθετικής μεταβολής.*** Αν $k > 0$ έχουμε αύξηση του πληθυσμού, ενώ αν $k < 0$ έχουμε μείωση του πληθυσμού. Η σταθερά αναλογίας k εξαρτάται από τον εκάστοτε πληθυσμό.

<u>4^{ος} τρόπος επίλυσης</u>:

Αν ξεκινήσουμε από την εξίσωση:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y, \text{ με } y(0) = y_0 \quad (1)$$

$$\text{για κάθε } t \geq 0, \text{ με } y > 0$$

παρατηρούμε ότι μπορούμε να αναγνωρίσουμε επίσης μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών (βλ. Κεφάλαιο Διαφορικές Εξισώσεις). Ακολουθώντας λοιπόν τη συγκεκριμένη διαδικασία έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt$$

$$lny = kt + c_1$$

$$y = e^{\,kt+c_1}$$

$$y = e^{c_1} e^{\,kt}$$

$$y = ce^{\,kt}, \text{ όπου } c = e^{c_1} > 0.$$

Επειδή $y(0) = y_0$, έχουμε $y_0 = c$, οπότε:

$$y(t) = y_0 e^{\,k\,t}, \quad t \geq 0.$$

Σχόλιο. Είναι λοιπόν προφανές πώς ο 2^{ος} τρόπος επίλυσης, ο οποίος βασίζεται στα πορίσματα του Θ.Μ.Τ., σχετίζεται άμεσα με τη λογική η οποία εμπεριέχεται στη θεωρία του χωρισμού των μεταβλητών.

IV. Εφαρμογή:

Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν ότι:

$$2\,f(x) - 2\,f\,'(x) = 1 - x \;\text{ και }\; f\,(0) \;=\; 2.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται

$$2\,f(x) - 2\,f\,'(x) = 1 - x \Leftrightarrow 2\,f(x) + x = \;2\,f\,'(x) + 1.$$

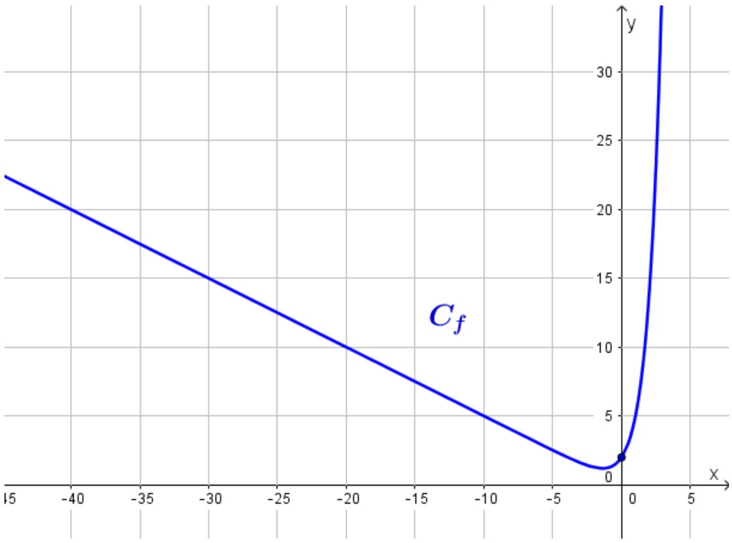
Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = 2\,f(x) + x$.

Τότε είναι $g(x) = g'(x)$ και σύμφωνα με την εφαρμογή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = ce^{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως προκύπτει $2\,f(x) + x = ce^{x}$ και αφού $f\,(0) \;=\; 2$, τότε $c = 4$.

Άρα είναι:

$$f(x) = 2e^{x} - \frac{1}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



8. Μια Διαφορική Εξίσωση – Τρία Προβλήματα

Το πρόβλημα εύρεσης της συνάρτησης $y = f(x)$, για την οποία ισχύει:

$$2y - xy' = 0$$

υπό τρεις διαφορετικούς περιορισμούς.

Ι. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει:

$$\mathbf{2y - xy' = 0}, \quad \boldsymbol{x \neq 0}, \quad \boldsymbol{y} > 0.$$

<u>Λύση</u>

Αν θέσουμε $y = f(x)$, τότε έχουμε:

$$2f(x) - xf'(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad f(x) > 0.$$

Το πρώτο που παρατηρούμε είναι ότι $x \neq 0$, δηλαδή το Πεδίο Ορισμού της f είναι το $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, δηλαδή ένωση διαστημάτων. Ως γνωστόν, το θεώρημα (και το πόρισμα) ύπαρξης αρχικής συνάρτησης δεν ισχύουν σε ένωση διαστημάτων και ως εκ τούτου πρέπει να εργασθούμε σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, η εξίσωση γράφεται:

$$2f(x) - xf'(x) = 0$$

$$xf'(x) = 2f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x}$$

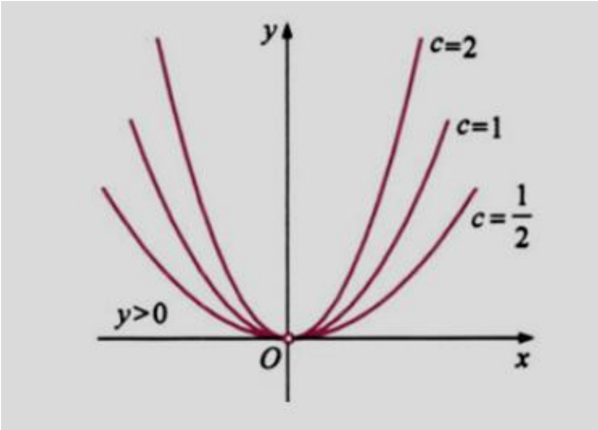
$$\big(\ln(f(x))\big)' = (2ln|x|)'$$

$$\ln\big(f(x)\big) = 2ln|x| + c_1 = lnx^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{lnx^2 + c_1} = e^{c_1}e^{lnx^2} = cx^2, \text{ όπου } c = e^{c_1} > 0.$$

Επομένως σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, είναι:

$$f(x) = cx^2 \text{ όπου } c > 0.$$



ΙΙ. Να βρεθεί η συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$\boldsymbol{2y - xy' = 0, x \neq 0}, \quad \boldsymbol{y} > 0$$

αν επιπλέον είναι $\boldsymbol{f(1) = \frac{1}{2}}$ και $\boldsymbol{f(-1) = 2}$.

Λύση

Από το προηγούμενο ερώτημα έχει προκύψει ότι σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, είναι:

$$f(x) = cx^2, \text{ όπου } c > 0.$$

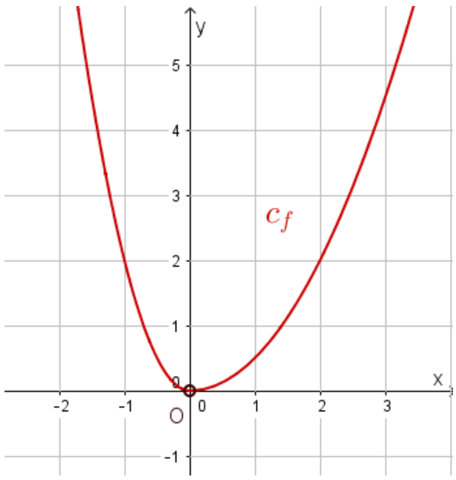
Αφού λοιπόν $f(1) = \frac{1}{2}$, τότε $c = \frac{1}{2}$, επομένως

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2, x \in (0, +\infty).$$

Επίσης, αφού είναι $f(-1) = 2$, τότε $c = 2$ και

$$f(x) = 2x^2, x \in (-\infty, 0).$$

Δηλαδή η ζητούμενη συνάρτηση είναι η (βλ. διπλανό σχήμα),



$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 0 \end{cases}.$$

Σχόλιο. Είναι προφανές από το παράδειγμα, ότι η τιμή της σταθεράς c σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ δεν είναι απαραίτητα η ίδια.

ΙΙΙ. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει:

$$\boldsymbol{2y - xy' = 0}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>

Το ενδιαφέρον στοιχείο τώρα, είναι η απουσία των περιορισμών. Αντιμετωπίζουμε τώρα την εξίσωση ως γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης και έχουμε:

$$2f(x) - xf'(x) = 0$$

$$xf'(x) - 2f(x) = 0 \quad (1)$$

Αν τώρα είναι $x \neq 0$, έχουμε:

$$f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = 0.$$

- Μία αρχική συνάρτηση, της συνάρτησης $-\frac{2}{x}$, είναι η:

$$A(x) = -2ln|x| = -lnx^2 = ln\frac{1}{x^2}.$$

- Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης $I(x) = e^{A(x)} = e^{ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$.

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$\frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{x}f(x) = 0$$

$$\frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{2}{x^3}f(x) = 0$$

$$\left(f(x) \cdot \frac{1}{x^2}\right)' = 0.$$

Επομένως υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, να είναι:

$$f(x) \cdot \frac{1}{x^2} = c_1 \Leftrightarrow f(x) = c_1x^2, \quad x < 0 \text{ και}$$

$$f(x) \cdot \frac{1}{x^2} = c_2 \Leftrightarrow f(x) = c_2x^2, \quad x > 0$$

Η εξίσωση (1) όμως ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

Άρα για $x = 0$ έχουμε:

$$0 \cdot f'(0) - 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Επειδή όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι παραγωγίσιμη επομένως και συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} c_1x^2 = \lim_{x\to 0^+} c_2x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 \cdot c_1 = 0 \cdot c_2 = 0.$$

Η τελευταία αληθεύει για όλες τις σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $f(x) = cx^2$, σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $[0, +\infty)$.

9. Ασκήσεις

Α. Ασκήσεις με συναρτησιακές σχέσεις:

1. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(a\beta) = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha), \;\; a, \beta > 0 \quad (1)$$

Να αποδειχθεί ότι:

Α) $f(1) = 0$.

Β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 2007$, να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $xf'(x) - f(x) = 2017x$.

Γ) Να βρεθεί ό τύπος της f.

<u>Λύση</u>

Α) Από την (1) για $\alpha = \beta = 1$ προκύπτει ότι $f(1) = 0$.

Β) Είναι

$$2017 = f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x - 1} \quad (2)$$

Έστω τυχαίο $x_0 \in (0, +\infty)$. Αρχικά πρέπει να αποδείξουμε ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Αν θέσουμε $u = \frac{x}{x_0}$, τότε $x = ux_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} u = 1$, οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{u\to 1}\frac{f(ux_0) - f(x_0)}{ux_0 - x_0} = \lim_{u\to 1}\frac{uf(x_0) + x_0 f(u) - f(x_0)}{x_0(u - 1)} =$$

$$= \lim_{u\to 1}\left(\frac{f(x_0)(u - 1)}{x_0(u - 1)} + \frac{x_0 f(u)}{x_0(u - 1)}\right) = \lim_{u\to 1}\left(\frac{f(x_0)}{x_0} + \frac{f(u)}{u - 1}\right) =$$

$$= \frac{f(x_0)}{x_0} + f'(1) = \frac{f(x_0)}{x_0} + 2017.$$

Άρα $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} + 2017$, για κάθε $x_0 > 0$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} + 2017 \Rightarrow x \cdot f'(x) = f(x) + 2017x \Rightarrow x \cdot f'(x) - f(x) = 2017x.$

Γ) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 2017x \overset{x>0}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{2017}{x} \Rightarrow$$

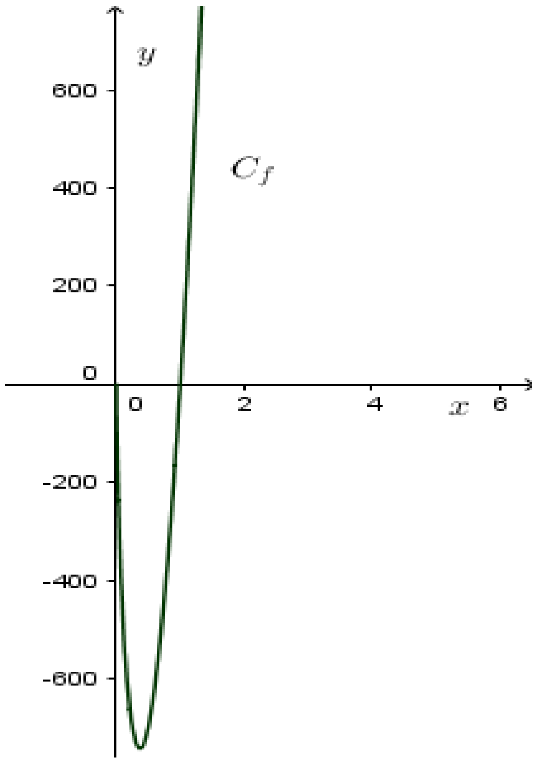
$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (2017\, lnx)' \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = 2017\, lnx + c \quad (3)$$

Από την (3) για $x = 1$ προκύπτει ότι $c = 0$.

Άρα $\frac{f(x)}{x} = 2017\, lnx$ και τελικά είναι:

$$f(x) = 2017\, xlnx, \quad x > 0.$$



<u>Παρατήρηση</u>: Οι επόμενες τρεις ασκήσεις ανήκουν στην ίδια κατηγορία και προσφέρονται για επίλυση.

2. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

- $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) + 2\beta \cdot e^{\alpha} - \alpha\eta\mu\beta - 1$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 1$

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια

ii) να βρείτε τον τύπο της.

3. Έστω f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \text{ με } \alpha, \beta > 0.$$

Α) Να αποδειχθεί ότι:

i) $f(1) = 1$.

ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x), x > 0$.

iii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = e$ με $f'(e) = \frac{1}{e}$,

τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

4. Έστω συνάρτηση f με $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) + \alpha\beta$, όπου α, β πραγματικοί

αριθμοί και $f'(0) = 2$.

Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί ο τύπος της.

Β. Ασκήσεις με διαφορικές εξισώσεις 2ου βαθμού:

1. Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

με $f(0) = 2000$ και $f(1) = 2001$.

<u>Λύση</u>

Αφού $f''(x) = 0$, τότε υπάρχει σταθερά c_1 τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(x) = c_1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι δηλαδή $f'(x) = (c_1 x)'$, επομένως υπάρχει σταθερά c_2 τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x) = c_1 x + c_2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή όμως $f(0) = 2000 \Rightarrow c_2 = 2000$.

Επίσης $f(1) = 2001 \Rightarrow 2001 = c_1 + 2000 \Rightarrow c_1 = 1$.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = x + 2000, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Να βρεθεί η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$xf''(x) - (x-2)f'(x) - f(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(1) = 1 \quad (1)$$

<u>Λύση</u>

Η διαφορική εξίσωση είναι 2ης τάξης. Καταρχάς, θα επιδιώξουμε να βρούμε μία εξίσωση που περιγράφει τις λύσεις της f', δηλαδή να καταλήξουμε σε μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξης. Έτσι έχουμε ισοδύναμα:

$$xf''(x) + f'(x) = (x-1)f'(x) + f(x)$$
$$\left(xf'(x)\right)' = \left((x-1)f(x)\right)'$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$xf'(x) = (x-1)f(x) + c_1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αφού όμως $f'(1) = 1$, προκύπτει ότι $c_1 = 1$ και ως εκ τούτου είναι:

$$xf'(x) = (x-1)f(x) + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Τώρα έχουμε μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, η οποία ισοδύναμα γίνεται:

$$xf'(x) + f(x) = xf(x) + 1 \quad (2)$$

Αν θέσουμε $g(x) = xf(x) + 1$, τότε η (2) γίνεται:

$$g'(x) = g(x)$$

για την οποία γνωρίζουμε (εφαρμογή του βιβλίου), ότι υπάρχει σταθερά τέτοια ώστε

$$g(x) = ce^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι ισχύει $xf(x) + 1 = ce^x$.

Για να βρούμε την σταθερά, θέτουμε όπου $x = 0$ και προκύπτει ότι $c = 1$.

Άρα έχουμε: $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $x \neq 0$, είναι:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Αφού όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, έπεται ότι είναι και συνεχής. Έτσι:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

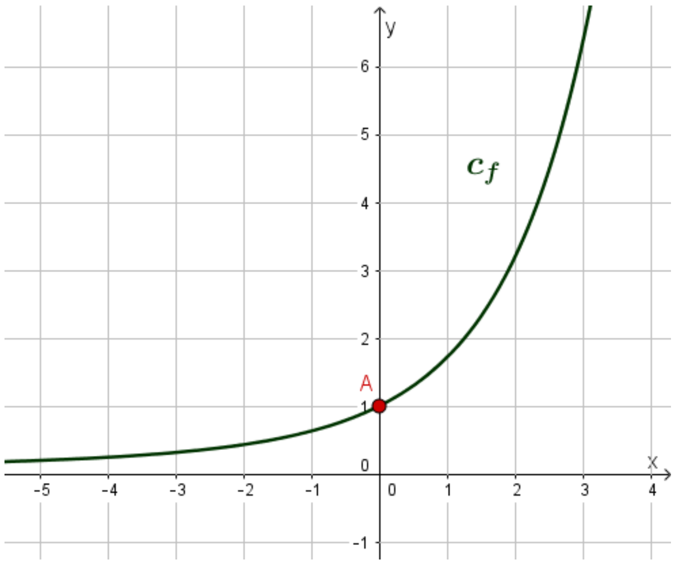
Το όριο* στο οποίο καταλήγουμε είναι η παράγωγος της συνάρτησης $h(x) = e^x$στο $x_0 = 0$, δηλαδή $h'(0) = e^0 = 1$. Άρα $f(0) = 1$. Δηλαδή στην γραφική παράσταση της f συμπεριλαμβάνεται και το σημείο $A(0,1)$.

**(εναλλακτικά εφαρμόζουμε τους κανόνες de l' Hospital)*

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της (1), είναι η:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

με γραφική παράσταση:



Σχόλιο. Για περισσότερες ασκήσεις βλ. στο επόμενο Κεφάλαιο Διαφορικών Εξισώσεων ($4^{η}$ Μορφή).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο:

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1η Μορφή: Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών

Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\boldsymbol{\alpha(y)\cdot y' = \beta(x)}$$

όπου $y = f(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση, $\alpha(y)$ συνάρτηση του y και $\beta(x)$ συνάρτηση του x.

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της ως προς x, έχουμε:

$$\int \alpha(y)y'\,dx = \int \beta(x)\,dx.$$

Επειδή όμως $y = f(x)$, έπεται ότι $dy = f'(x)dx = y'dx$.

Επομένως είναι:

$$\boldsymbol{\int \alpha(y)\,dy = \int \beta(x)\,dx.}$$

Αν τώρα $A(y)$ είναι μία παράγουσα της $\alpha(y)$ και $B(x)$ είναι μία παράγουσα της $\beta(x)$, τότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\boldsymbol{A(y) = B(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.}$$

Σχόλιο. Η άτυπη μορφή της δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών είναι η

$$\boldsymbol{\alpha(y)dy = \beta(x)dx}$$

και η γενική της λύση είναι η

$$\boldsymbol{\int \alpha(y)\,dy = \int \beta(x)\,dx + c.}$$

Παράδειγμα 1ο

Α. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(x+1)dy - x(y+1)dx = 0$.

Λύση

Θέτουμε την εξίσωση σε μορφή δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών και ολοκληρώνουμε, δηλαδή:

$$(x+1)dy = x(y+1)dx$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{x\,dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{x\,dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx$$

$$ln|y+1| = x - ln|x+1| + c$$

$$|y+1| = e^{x-ln|x+1|+c}$$

$$y+1 = \pm e^{c} \cdot e^{x-ln|x+1|}$$

$$y = k \cdot e^{x-ln|x+1|} - 1, \text{ όπου } k = \pm e^{c}$$

$$y = k \cdot \frac{e^{x}}{|x+1|} - 1, \text{ όπου } k = \pm e^{c}.$$

Β. Να βρεθεί συνάρτηση $f: (-1,+\infty) \to (-1,+\infty)$ για την οποία ισχύουν

$$(x+1)f'(x) = x(f(x)+1) \text{ και } f(0) = 0.$$

Λύση

Αν θέσουμε $y = f(x)$ προκύπτει η δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών του Α. ερωτήματος. Έτσι η αναμενόμενη λύση θα είναι η $y = \frac{e^{x}}{x+1} - 1, x \in (-1,+\infty)$.

Μπορούμε όμως να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία, η λογική της οποίας εμπεριέχει τη γνώση της θεωρίας του χωρισμού των μεταβλητών.

$$(x+1)f'(x) = x(f(x)+1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)+1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{(f(x)+1)'}{f(x)+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\big(ln(f(x)+1)\big)' = (x - \ln(x+1))'.$$

Επομένως υπάρχει σταθερά c, έτσι ώστε για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ να ισχύει:

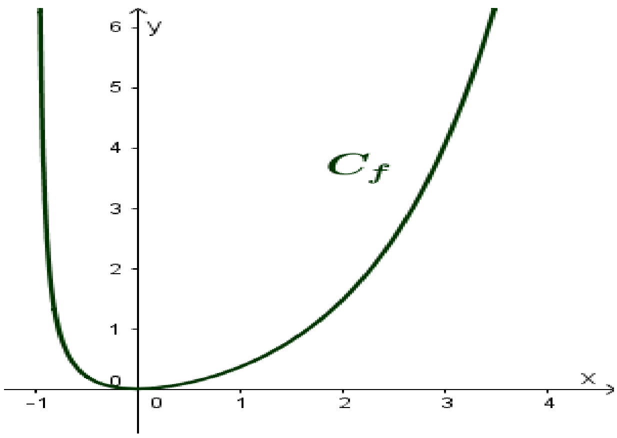
$$ln(f(x)+1) = x - \ln(x+1) + c.$$

Αφού $f(0) = 0$ προκύπτει ότι $c = 1$ και ως εκ τούτου είναι:

$$ln(f(x)+1) \ = x - \ln(x+1)$$

και τελικά:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} - 1, \quad x \in (-1, +\infty).$$



Παράδειγμα 2ο

Α. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $\boldsymbol{e^x dx - y dy = 0,\ y(0) = 1.}$

<u>Λύση</u>

Η ανωτέρω δ.ε. είναι χωριζόμενων μεταβλητών, επομένως είναι:

$$e^x dx - y dy = 0$$

$$e^x dx = y dy$$

$$\int e^x dx = \int y dy$$

$$e^x = \frac{y^2}{2} + c$$

$$y^2 = 2e^x + k \quad (\gamma\iota\alpha\ k = -2c).$$

Αλλά από την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ προκύπτει ότι $k = -1$, επομένως η λύση του προβλήματος είναι $y^2 = 2e^x - 1$ ή $y = \sqrt{2e^x - 1}$ (η αρνητική λύση αποκλείεται λόγω της αρχικής συνθήκης).

Επιπλέον πρέπει να ισχύει $2e^x - 1 \geq 0$ και για να υπάρχει η παράγωγος πρέπει $2e^x - 1 \neq 0$. Ως εκ τούτου ο περιορισμός είναι $2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -ln2$.

Η συνάρτηση λοιπόν που ικανοποιεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών είναι η:

$$y = \sqrt{2e^x - 1}, \quad x > -ln2.$$

Β. Να βρεθεί η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε: $\boldsymbol{f(x) \cdot f'(x) = e^x}$ και $\boldsymbol{f(0) = 1}$.

<u>Λύση</u>

Αν θέσουμε $y = f(x)$, έπεται ότι $dy = f'(x)dx = y'dx$. Επομένως έχουμε:

$y\,\frac{dy}{dx} = e^x \Leftrightarrow e^x dx = y dy, y(0) = 1$, δηλαδή τη δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών του Α ερωτήματος. Ας δούμε όμως τον παρακάτω τρόπο επίλυσης.

$$f(x) \cdot f'(x) = e^x \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 2e^x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = (2e^x)'.$$

Επομένως υπάρχει σταθερά c, έτσι ώστε $f^2(x) = 2e^x + c$.

Αφού όμως $f(0) = 1$ προκύπτει ότι $c = -1$ και ως εκ τούτου $f^2(x) = 2e^x - 1$. Αλλά:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -ln2.$$

Επίσης είναι $2e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -ln2$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) στο διάστημα $(-ln2, +\infty)$ και επιπλέον δεν μηδενίζεται. Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0) = 1 > 0$, προκύπτει ότι $f(x) = \sqrt{2e^x - 1}$.

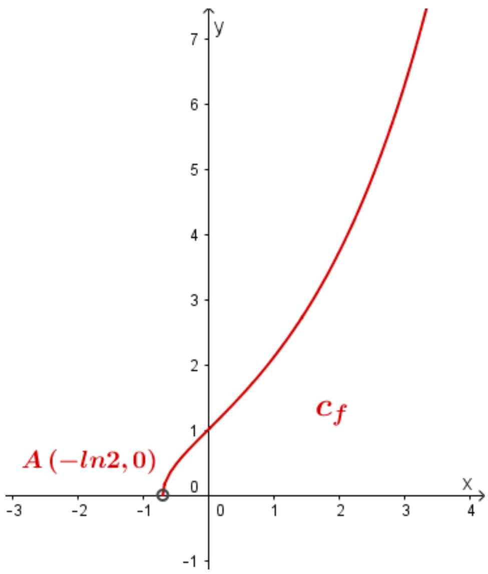
Επειδή όμως η παράγωγός της συνάρτησης είναι $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2e^x-1}}$, πρέπει

$2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -ln2$.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = \sqrt{2e^x - 1}, \quad x > -ln2$$

με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 3ο

Α. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\boldsymbol{y' = \frac{x\,e^x}{2\,y}}$.

Λύση

Είναι $\frac{dy}{dx} = \frac{x\,e^x}{2y}$ ή $2ydy = x\,e^x dx$ δηλαδή μία δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών, με γενική λύση την $\int 2ydy = \int x\,e^x dx + c$.

Β. Να βρεθεί η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε: $\boldsymbol{f'(x) = \frac{x\,e^x}{2\,f(x)}}$ και $\boldsymbol{f(0) = -1}$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{x\,e^x}{2\,f(x)}\ , f(x) \neq 0$$

$$2\,f(x) \cdot f'(x) = x\,e^x$$

$$\left(f^2(x)\right)' = x\,e^x.$$

Αναζητούμε λοιπόν μία αρχική συνάρτηση $\Phi(x)$ της συνεχούς συνάρτησης $\varphi(x) = x\,e^x$, την οποία μπορούμε να βρούμε χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. Έτσι αν $x \in [\alpha, \beta]$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\int_\alpha^\beta x\,e^x dx = \int_\alpha^\beta x \cdot (e^x)' dx = [xe^x]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^x dx = [xe^x - e^x]_\alpha^\beta = [\Phi(x)]_\alpha^\beta$$

Δηλαδή μία αρχική συνάρτηση είναι η $\Phi(x) = xe^x - e^x$.

Επομένως έχουμε

$$\left(f^2(x)\right)' = (xe^x - e^x)'$$

$$f^2(x) = xe^x - e^x + c.$$

Αφού όμως $f(0) = -1$ προκύπτει ότι $c = 2$ και ως εκ τούτου $f^2(x) = xe^x - e^x + 2$

Πρέπει όμως $xe^x - e^x + 2 \geq 0$.

Θεωρώντας συνάρτηση g με $g(x) = xe^x - e^x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ είναι

$g'(x) = xe^x,\ x \in \mathbb{R}$ και προκύπτουν τα ακόλουθα:

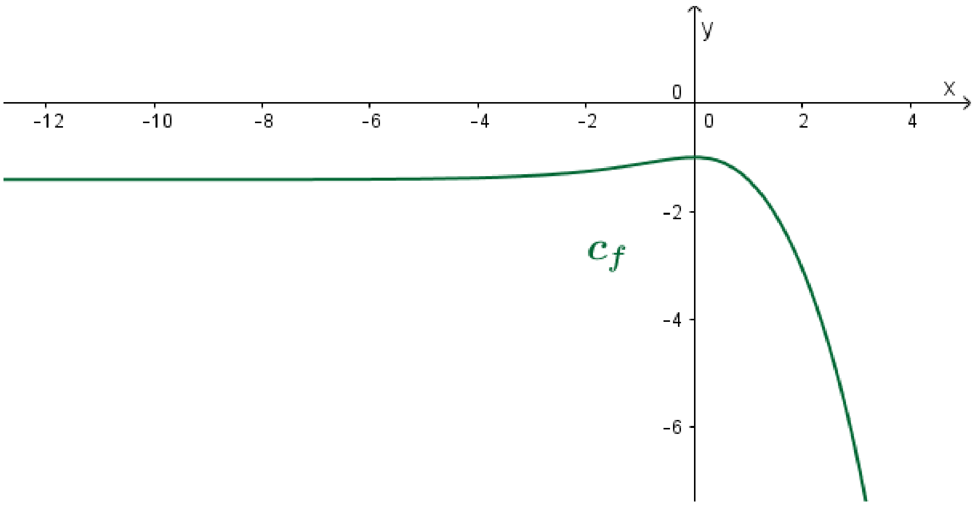
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	Ο.Ε.	↗

Επομένως είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον δεν μηδενίζεται. Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0) = -1 < 0$, προκύπτει ότι η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = -\sqrt{xe^x - e^x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

με γραφική παράσταση:



$2^η$ Μορφή: Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ομογενής

Αν μία δ.ε. μπορεί να τεθεί στη μορφή $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ λέγεται ομογενής. Τότε με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής μπορεί να μετασχηματισθεί σε δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών.

Πράγματι θέτοντας $u = \frac{y}{x}$, οπότε $y = u\,x$ και $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ η δ.ε. γίνεται:

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = f(u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{1}{x}dx$$

η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών και αφού λυθεί και βρεθεί η u, τότε η λύση της αρχικής εξίσωσης προκύπτει αντικαθιστώντας το u με το $\frac{y}{x}$.

Παράδειγμα 1ο

Α. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\boldsymbol{x^2 dy + (y^2 - xy)dx = 0}$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$x^2 dy = (xy - y^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Θέτοντας $u = \frac{y}{x}$, οπότε $y = u\,x$ και $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$, η δ.ε. γίνεται:

$$\frac{du}{dx}x + u = u - u^2$$

$$\frac{du}{dx}x = -u^2$$

$$\frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{u} = -ln|x| + c$$

$$u = \frac{1}{\ln k|x|}$$

$$y = \frac{x}{\ln k|x|}.$$

B. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε: $\boldsymbol{x^2 f'(x) = x f(x) - f^2(x),\ x > 0}$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{xf(x) - f^2(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f^2(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2.$$

Θέτοντας $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι $f(x) = xg(x)$ και $f'(x) = g(x) + xg'(x)$.

Επομένως είναι:

$$g(x) + xg'(x) = g(x) - g^2(x) \Leftrightarrow xg'(x) = -g^2(x) \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{g(x)}\right)' = (-lnx)' \Leftrightarrow -\frac{1}{g(x)} = -lnx + c \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{\ln(kx)}\ ,\ \text{ όπου } k = e^{-c}.$$

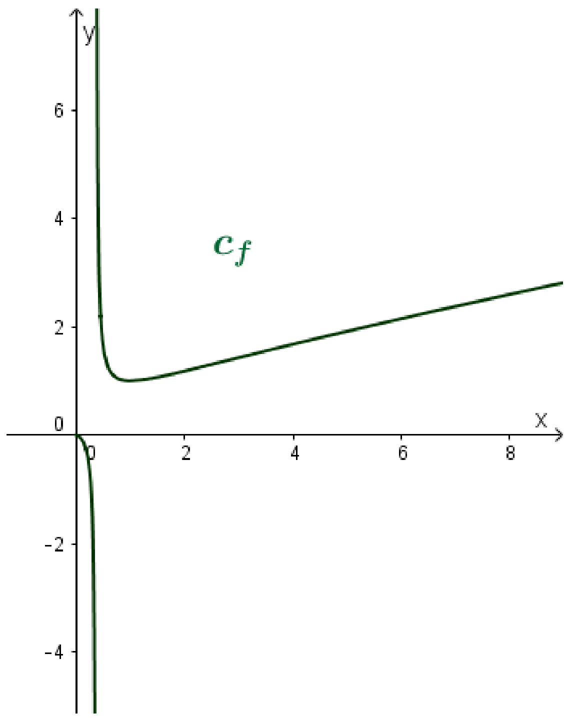
Δηλαδή:

$$f(x) = \frac{x}{\ln{(kx)}},\quad x > 0,\ k > 0.$$

Αν τώρα γνωρίζουμε μία τιμή της συνάρτησης, για παράδειγμα $f(1) = 1$, προκύπτει μία από όλη την οικογένεια, η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{\ln{(e\,x)}}, \quad x > 0$$

με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 2ο

Α. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\boldsymbol{y' = \frac{x+y}{x}}$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$y' = \frac{x\ +\ y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Θέτοντας $u = \frac{y}{x}$, οπότε $y = u\,x$ και $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$, η δ.ε. γίνεται:

$$\frac{du}{dx}x + u = u + 1$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{x}\, dx + c$$

$$u = ln|x| + c$$

$$y = x\ln(k|x|) \text{ όπου } k = e^c.$$

Β. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε: $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{x+f(x)}}{\boldsymbol{x}}$, με $\boldsymbol{x} > 0$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{x + f(x)}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}.$$

Θέτοντας $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι $f(x) = xg(x)$ και $f'(x) = g(x) + xg'(x)$.

Επομένως είναι:

$$x\, g'(x) = 1$$

$$g'(x) = (ln|x|)'$$

$$g(x) = ln|x| + c$$

$$f(x) = x\ln(kx) \text{ όπου } k = e^c.$$

<u>β΄ τρόπος</u>: Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{x + f(x)}{x}$$

$$x\, f'(x) = x + f(x)$$

$$xf'(x) - f(x) = x, \quad x > 0.$$

Η κεντρική ιδέα της ομογενούς δ.ε. $1^{ης}$ τάξης είναι ο μετασχηματισμός $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Επομένως μπορούμε να αναζητήσουμε στο $1^{ο}$ μέλος της δ.ε. την παράγωγο του πηλίκου $\frac{f(x)}{x}$. Αυτό είναι εφικτό αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δ.ε. με $x^2 \neq 0$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{x\,f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (ln|x|)'$$

$$\frac{f(x)}{x} = ln|x| + c$$

$$f(x) = x\,lnx + c\,x$$

$$f(x) = x\,lnx + x\,lnk\,, k = e^c$$

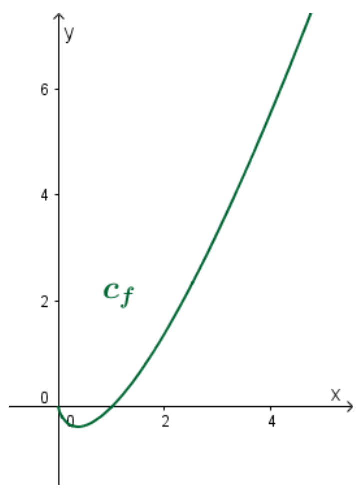
$$f(x) = x(lnx + lnk)$$

$$f(x) = xln(kx), \quad kx > 0.$$

Αν τώρα γνωρίζουμε μία τιμή της συνάρτησης, για παράδειγμα $f(1) = 0$, προκύπτει μία από όλη την οικογένεια συναρτήσεων η

$$f(x) = xlnx, \quad x > 0$$

με γραφική παράσταση:



Σχόλιο. Ενδιαφέρον επίσης έχει η εξής διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης:

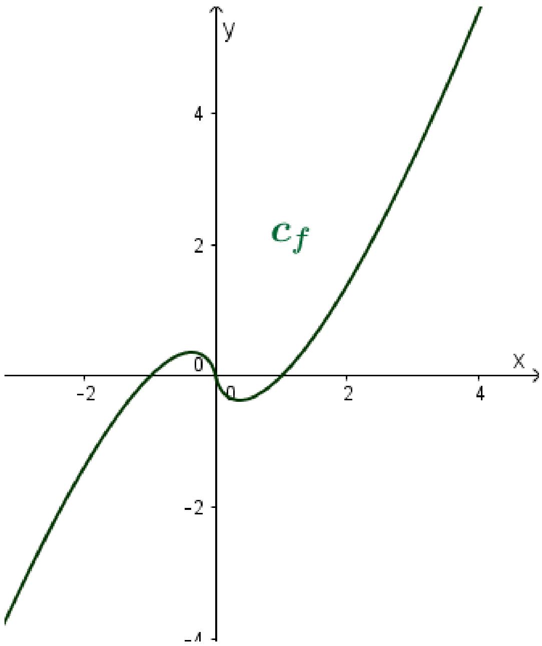
Να βρεθεί η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x+f(x)}{x}}, \textbf{ με } \boldsymbol{x \neq 0} \textbf{ και } \boldsymbol{f(1) = f(-1) = 0.}$$

Τώρα εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο στα ξεχωριστά διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και η λύση που προκύπτει είναι η:

$$f(x) = xln|x|, \quad x \neq 0$$

με γραφική παράσταση:



$3^{η}$ Μορφή: Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\boldsymbol{y' + a(x)y = b(x)}$$

όπου $y = f(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση και $a(x), b(x)$ συναρτήσεις του x.

Για την επίλυση της εξίσωσης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Αναζητούμε μία αρχική συνάρτηση $A(x)$, της συνάρτησης $a(x)$.
- Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης $I(x) = e^{A(x)}$.

Έτσι, έχουμε διαδοχικά:

$$y'e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}\, y = b(x)e^{A(x)} \xLeftrightarrow{A'(x) = a(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + A'(x)e^{A(x)}\, y = b(x)e^{A(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + \left(e^{A(x)}\right)' y = b(x)e^{A(x)}$$

$$\left(y\, e^{A(x)}\right)' = b(x)e^{A(x)}$$

$$\int \left(y\, e^{A(x)}\right)' dx = \int b(x)e^{A(x)}\, dx$$

$$\boldsymbol{y\, e^{A(x)} = B(x) + c}$$

όπου $B(x)$ είναι μία αρχική συνάρτηση της $b(x)e^{A(x)}$.

Σε περίπτωση κατά την οποία η διαφορική εξίσωση είναι στη μορφή

$$\boldsymbol{p(x)y' + a(x)y = b(x)}.$$

Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Αν το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι η παράγωγος του γινομένου $y \cdot p(x)$, τότε ονομάζεται **ακριβής** δ.ε. και μετασχηματίζεται στη μορφή:

$$\left(y \cdot p(x)\right)' = b(x)$$

$$\int \left(y \cdot p(x)\right)' dx = \int b(x)\, dx$$

$$y \cdot p(x) = q(x) + c$$

όπου $q(x)$ είναι μία αρχική συνάρτηση της $b(x)$.

- Στην περίπτωση που δεν είναι ακριβής, διαιρούμε τα δύο μέλη με $p(x)$ και προκύπτει η εξίσωση στη μορφή:

$$\boldsymbol{y' + \frac{a(x)}{p(x)}\, y = \frac{b(x)}{p(x)}}$$

δηλαδή μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, την οποία και επιλύουμε όπως ανωτέρω.

Παράδειγμα 1$^{\text{ο}}$

Α. Να βρεθεί συνάρτηση f, έτσι ώστε: $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι η παράγωγος του γινομένου $f(x) \cdot (1 + x^2)$. Επομένως είναι:

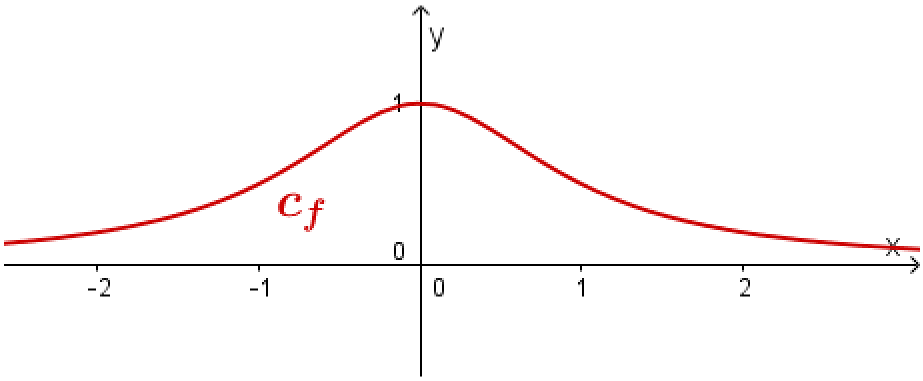
$$\big(f(x) \cdot (1 + x^2)\big)' = 0$$

$$f(x) \cdot (1 + x^2) = c.$$

Αφού $f(0) = 1$ προκύπτει ότι $c = 1$ και ως εκ τούτου είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

με γραφική παράσταση:



Β. *Αξίζει να τονισθεί ότι* ***ακριβής*** *ονομάζεται μία διαφορική εξίσωση που μπορεί να γραφεί στη μορφή:*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

και έχει την ιδιότητα:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Ως εφαρμογή θα λυθεί η ακριβής δ.ε. $(y - \eta\mu x)dx + xdy = 0$.

Παρατηρούμε ότι όντως η παράγωγος του $(y - \eta\mu x)$ ως προς y είναι 1 και ισούται με την παράγωγο του x ως προς x.

Διαμορφώνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$xdy = (\eta\mu x - y)dx$$

$$x\,\frac{dy}{dx} = \eta\mu x - y.$$

Επομένως, η άσκηση διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε:

$$\boldsymbol{x\,f'(x) = \eta\mu x - f(x), \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Επιπρόσθετα, για να βρούμε μία συγκεκριμένη συνάρτηση, δίνουμε μία τιμή της, για παράδειγμα $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$x\,f'(x) + f(x) = \eta\mu x$$

$$\big(x\,f(x)\big)' = (-\sigma\upsilon\nu x)'$$

$$xf(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$, η παραπάνω σχέση δίνει $c = 1$. Έτσι είναι:

$$xf(x) = -\sigma\upsilon\nu x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, λύνοντας ως προς τη ζητούμενη συνάρτηση, έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}, \quad x \neq 0.$$

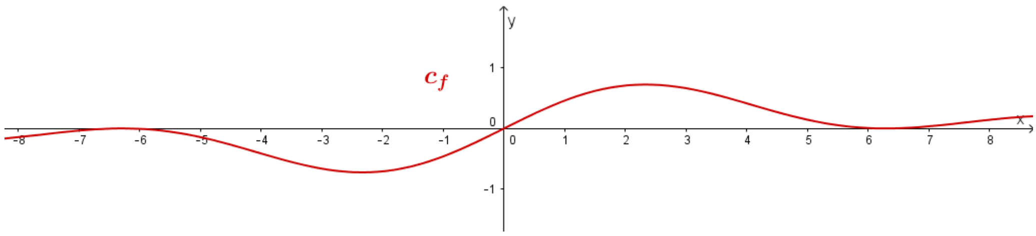
Η συνάρτηση όμως είναι παραγωγίσιμη – επομένως και συνεχής – για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, άρα και για $x = 0$. Επομένως είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0 = f(0).$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 2ο

Να βρεθεί συνάρτηση f, έτσι ώστε: $f'(x) - xf(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση είναι γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης και ως εκ τούτου έχουμε:

- Μία αρχική συνάρτηση, της συνάρτησης $-x$, είναι η $A(x) = -\frac{x^2}{2}$.

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης

$I(x) = e^{A(x)} = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Έτσι η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$e^{-x^2/2}f'(x) - xe^{-x^2/2}f(x) = -xe^{-x^2/2}$$

$$\left(e^{-x^2/2}f(x)\right)' = -x\, e^{-x^2/2}.$$

Στη συνέχεια αναζητούμε μία αρχική συνάρτηση της $-xe^{-x^2/2}$, η οποία είναι η $e^{-x^2/2}$. Επομένως η εξίσωση γίνεται:

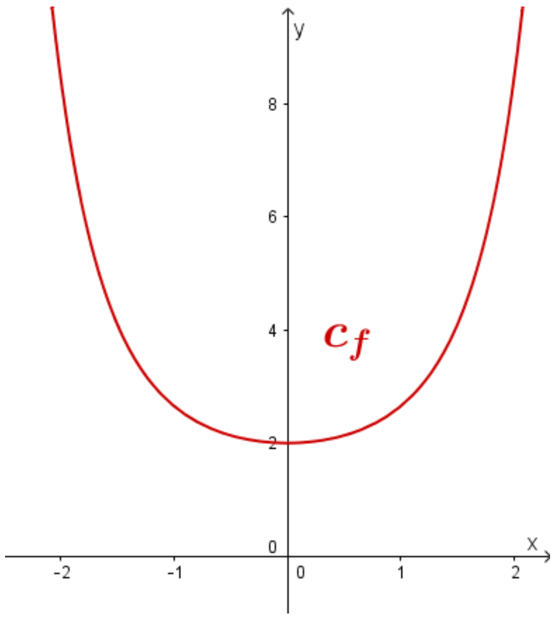
$$\left(e^{-x^2/2}f(x)\right)' = \left(e^{-x^2/2}\right)'$$

$$e^{-x^2/2}f(x) = e^{-x^2/2} + c.$$

Αφού $f(0) = 2$ προκύπτει ότι $c = 1$ και ως εκ τούτου είναι:

$$f(x) = 1 + e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

με γραφική παράσταση:



Σχόλιο. *Είναι προφανές ότι για την εύρεση πιο σύνθετων αρχικών συναρτήσεων είναι απαραίτητη η διαδικασία της ολοκλήρωσης. Τα επόμενα παραδείγματα είναι χαρακτηριστικά.*

Παράδειγμα 3ο

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = x^2 lnx$, όταν $x = 1$, $y = -\frac{1}{4}$.

<u>Λύση</u>

Αν διαιρέσουμε με $x^2 \neq 0$ έχουμε τη γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = lnx, \quad x > 0.$$

- Μία αρχική συνάρτηση, της συνάρτησης $\frac{1}{x}$, είναι η $A(x) = lnx$.
- Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης $I(x) = e^{A(x)} = e^{lnx} = x$, προκύπτει η ακριβής δ.ε.

$$x \frac{dy}{dx} + y = x\, lnx$$

$$(y \cdot x)' = x\, lnx$$

$$\int (y \cdot x)'\, dx = \int x\, lnx\, dx.$$

Είναι όμως:

$$\int x\, lnx\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' lnx\, dx = \frac{x^2}{2}\, lnx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\, lnx - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2}\, lnx - \frac{x^2}{4} + c.$$

Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης είναι η:

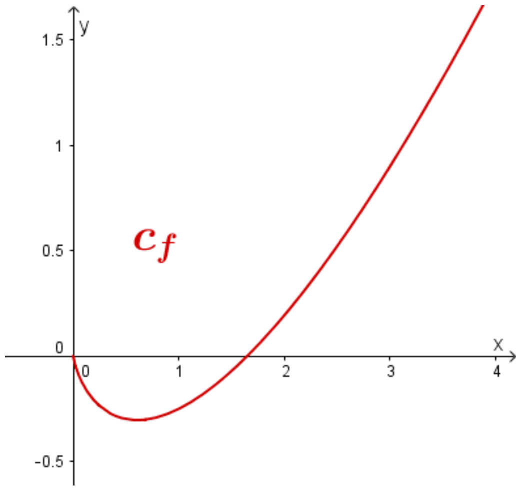
$$y \cdot x = \frac{x^2}{2}\, lnx - \frac{x^2}{4} + c.$$

Αφού όμως όταν $x = 1$, $y = -\frac{1}{4}$, προκύπτει ότι $c = 0$.

Ως εκ τούτου η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$y = \frac{x}{2}\, lnx - \frac{x}{4}, \quad x > 0$$

με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 4ο

Να βρεθεί συνάρτηση f, έτσι ώστε: $f'(x) + 2xf(x) = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση είναι γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης και ως εκ τούτου έχουμε:

- Μία αρχική συνάρτηση, της συνάρτησης $2x$, είναι η $A(x) = x^2$.
- Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα ολοκλήρωσης $I(x) = e^{A(x)} = e^{x^2}$, προκύπτει η ακριβής δ.ε.

$$e^{x^2} f'(x) + 2x\, e^{x^2} f(x) = 2x^3 e^{x^2}$$

$$\left(e^{x^2} f(x)\right)' = 2x^3 e^{x^2}$$

$$\int \left(e^{x^2} f(x)\right)' dx = \int 2x^3 e^{x^2} dx.$$

Είναι όμως:

$$\int 2x^3 e^{x^2} dx = \int \left(2x e^{x^2}\right) x^2 dx = \int \left(e^{x^2}\right)' x^2 dx =$$

$$x^2 e^{x^2} - \int 2x\, e^{x^2}\, dx = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c.$$

Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης είναι η:

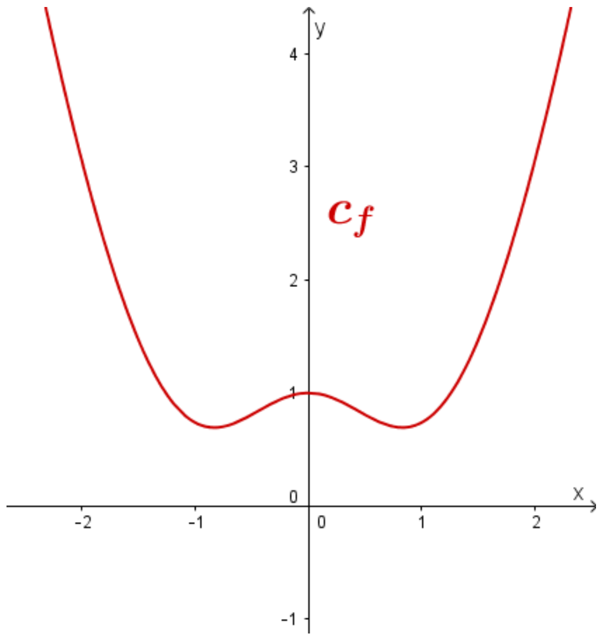
$$e^{x^2}f(x) = x^2e^{x^2} - e^{x^2} + c.$$

Αφού όμως $f(0) = 1$, προκύπτει ότι $c = 2$.

Ως εκ τούτου η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = x^2 - 1 + 2e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

με γραφική παράσταση:



$4^η$ Μορφή: Ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

Ορισμένοι τύποι δ.ε. δεύτερης τάξης της γενικής μορφής:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad (1)$$

μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις πρώτης τάξης με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

- Για παράδειγμα, εξισώσεις στις οποίες δεν εμφανίζεται η εξαρτημένη

μεταβλητή, όταν έχει την ειδική μορφή:

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad (2)$$

μπορούμε να την ανάγουμε σε δ.ε. πρώτης τάξης, με την αντικατάσταση

$$p = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Τότε η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή:

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

η οποία είναι πρώτης τάξης ως προς p. Η συνάρτηση y προκύπτει με μία ακόμη ολοκλήρωση.

- Επίσης, εξισώσεις στις οποίες δεν εμφανίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, όταν

έχει την ειδική μορφή:

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad (3)$$

οι ενδεικνυόμενες αντικαταστάσεις είναι

$$p = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Τότε η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή:

$$F\left(y, p, p \cdot \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

η οποία είναι πρώτης τάξης ως προς y. Η επίλυσή της δίνει το p ως συνάρτηση του y, ενώ μια δεύτερη ολοκλήρωση δίνει τη λύση της εξίσωσης.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα προσαρμοσμένα στις απαιτήσεις της ύλης του σχολικού βιβλίου.

Παράδειγμα 1$^{\text{ο}}$

Να βρεθεί η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε:

$$\boldsymbol{f''(x) + f'(x) = 0}$$

όταν στο σημείο O(0,0) της γραφικής της παράστασης, η κλίση της εφαπτομένης της ισούται με – 1.

<u>Λύση</u>

Αν θέσουμε $f'(x) = p(x)$ οπότε $f''(x) = p'(x)$, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης, με παράγοντα ολοκλήρωσης τον $I(x) = e^x$ και γράφεται διαδοχικά:

$$p'(x) + p(x) = 0$$

$$e^x p'(x) + e^x p(x) = 0$$

$$\left(e^x p(x)\right)' = 0$$

$$e^x p(x) = c_1$$

$$p(x) = c_1 e^{-x}.$$

Επομένως, επιστρέφοντας στη ζητούμενη συνάρτηση f, είναι:

$$f'(x) = c_1 e^{-x}$$

$$f'(x) = (-\, c_1 e^{-x})'$$

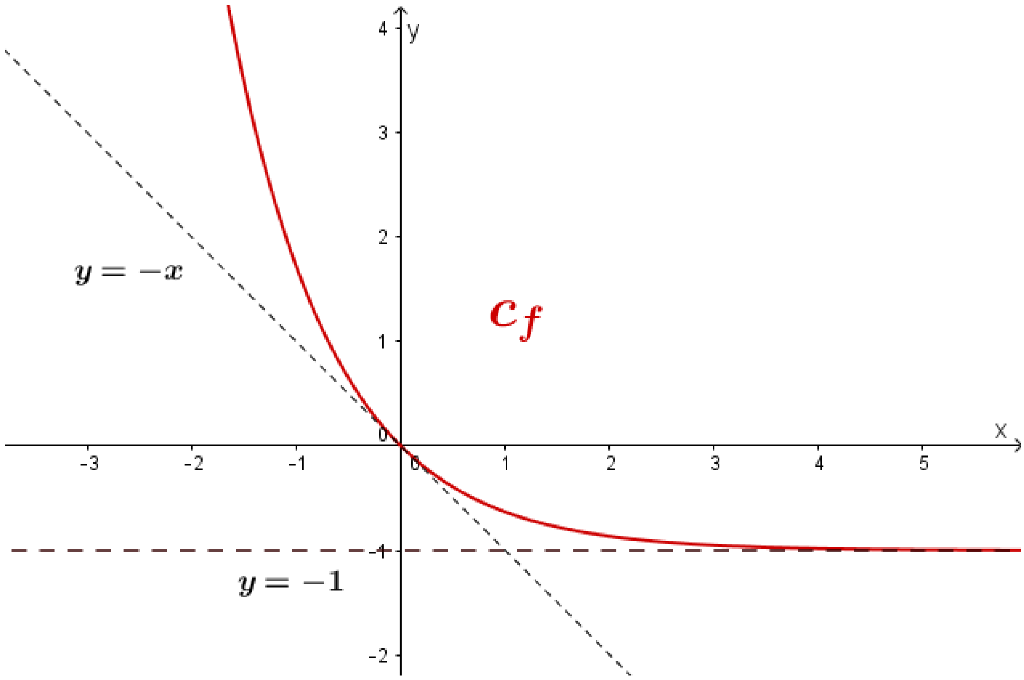
$$f(x) = -\, c_1 e^{-x} + c_2.$$

Επειδή όμως έχουμε $f(0) = 0$, και $f'(0) = -1$ είναι $c_1 = c_2 = -1$.

Ως εκ τούτου η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(x) = e^{-x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

με γραφική παράσταση:



Παράδειγμα 2ο

Να βρεθεί η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, έτσι ώστε:

$$\boldsymbol{f''(x) - f(x) = 0, \ \ \text{με} \ f(0) = 0 \ \ \text{και} \ f'(0) = 1}.$$

<u>Λύση</u>

Επειδή χρειαζόμαστε την $f'(x)$, αφενός μεν ως συνδετικό κρίκο μεταξύ των $f'(x)$ και $f''(x)$, αφετέρου δε για να τη χρησιμοποιήσουμε στην αλλαγή μεταβλητών, έχουμε:

$$f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x) = 0$$

$$f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x).$$

Αν στη συνέχεια θέσουμε $f'(x) + f(x) = p(x)$, τότε $f''(x) + f'(x) = p'(x)$ και έχουμε τη γνωστή δ.ε. (εφαρμογή σχολικού βιβλίου):

$$p'(x) = p(x)$$

με γενική λύση την:

$$p(x) = c_1\, e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως έχουμε:

$$f'(x) + f(x) = c_1\, e^x.$$

Η οποία με τη σειρά της είναι γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης, με παράγοντα ολοκλήρωσης τον $I(x) = e^x$ και γράφεται διαδοχικά:

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = c_1\, e^{2x}$$

$$\left(e^x f(x)\right)' = \left(\frac{1}{2} c_1\, e^{2x}\right)'$$

$$e^x f(x) = \frac{1}{2} c_1\, e^{2x} + c_2$$

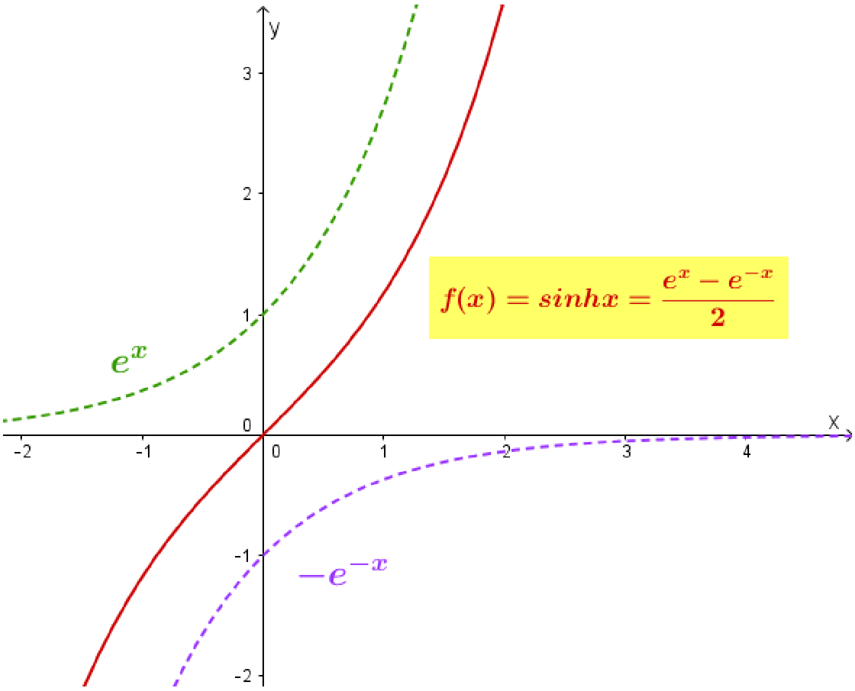
$$f(x) = \frac{1}{2} c_1\, e^x + c_2 e^{-x}.$$

Επειδή όμως έχουμε $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, είναι $c_1 = 1$ και $c_2 = -\frac{1}{2}$.

Ως εκ τούτου η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

με γραφική παράσταση:



Σχόλιο. Η ανωτέρω συνάρτηση, η οποία εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές, ονομάζεται ***υπερβολικό ημίτονο*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{sinhx}$, δηλαδή είναι:

$$sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άλλες υπερβολικές συναρτήσεις είναι οι

$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ (υπερβολικό συνημίτονο)

$tanhx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ (υπερβολική εφαπτομένη)

$cothx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ (υπερβολική συνεφαπτομένη)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $5^{ο}$:

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μια εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση, την οποία θέλουμε να προσδιορίσουμε, μέσα σε ένα ολοκλήρωμα ονομάζεται **ολοκληρωτική εξίσωση.**

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- στις εξισώσεις Fredholm, όπου τα άκρα ολοκλήρωσης είναι σταθερά,
- στις εξισώσεις Volterra, όπου το ένα από όρια ολοκλήρωσης είναι μεταβλητό.

Συγκεκριμένα έχουμε τον εξής ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $f(x)$ και $K(x,t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε:

(α) η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\lambda \int_{a}^{\beta} K(x,t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [a,\beta]$$

ονομάζεται **ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm $1^{ου}$ είδους**, ενώ η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\lambda \int_{a}^{\beta} K(x,t)u(t)dt + f(x) = u(x), \quad x \in [a,\beta]$$

ονομάζεται **ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm $2^{ου}$ είδους.**

(β) η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [a,\beta]$$

ονομάζεται **ολοκληρωτική εξίσωση Volterra $1^{ου}$ είδους**, ενώ η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt + f(x) = u(x), \quad x \in [a,\beta]$$

ονομάζεται **ολοκληρωτική εξίσωση Volterra $2^{ου}$ είδους.**

Παρατήρηση. (α) Η συνάρτηση $K(x,t)$ ονομάζεται **ολοκληρωτικός πυρήνας**.

(β) Ένας πυρήνας για τον οποίο ισχύει $K(x,t)=K(t,x)$ ονομάζεται **συμμετρικός**.

(γ) Αν η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε η ολοκληρωτική εξίσωση είναι $1^{ου}$ είδους, ενώ αν η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται και μέσα στο ολοκλήρωμα και έξω από αυτό είναι $2^{ου}$ είδους.

(δ) Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις ονομάζονται **ομογενείς** αν $f(x)=0$ και **μη ομογενείς** αν $f(x)\neq 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε ορισμένα παραδείγματα ολοκληρωτικών εξισώσεων, των οποίων η επίλυση θα βασιστεί στην ύλη της Γ΄ Λυκείου.

Α. Εξίσωση Volterra. Για να λύσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra, η ιδέα είναι να τη μετατρέψουμε σε διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα 1. Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$e^x(x-1)+x+1=\int_0^x (t+2)y(t)\,dt \quad (1)$$

<u>Λύση</u>

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) έχουμε διαδοχικά:

$$[e^x(x-1)+x+1]'=\left(\int_0^x (t+2)y(t)\,dt\right)'$$

$$e^x(x-1)+e^x+1=(x+2)y(x)$$

$$xe^x+1=(x+2)y(x)$$

$$y(x)=\frac{xe^x+1}{(x+2)},\quad x\neq -2.$$

Εφαρμογή 1. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^x(x-1)+x+1=\int_0^x (t+2)f(t)\,dt.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 2. Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) + 2\int_0^x y(t)\,dt \quad (2)$$

<u>Λύση</u>

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) έχουμε διαδοχικά:

$$y'(x) = \left[\frac{1}{2}(e^{2x} - 1)\right]' + \left(2\int_0^x y(t)\,dt\right)'$$

$$y'(x) = e^{2x} + 2y(x)$$

$$y'(x) - 2y(x) = e^{2x}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης. Για να την λύσουμε πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-2x}. Έτσι η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$e^{-2x}y'(x) - e^{-2x}2y(x) = e^{-2x} \cdot e^{2x}$$

$$[e^{-2x}y(x)]' = 1$$

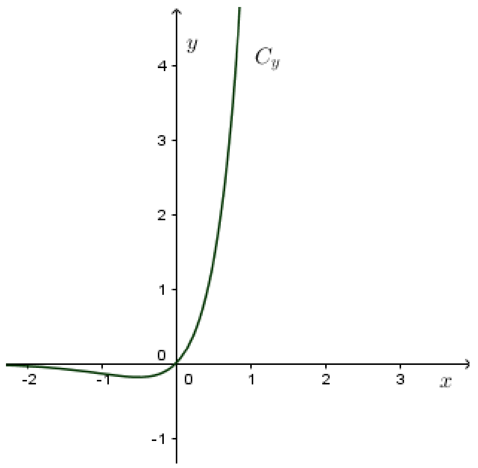
$$[e^{-2x}y(x)]' = (x)'$$

$$e^{-2x}y(x) = x + c.$$

Επειδή $y(0) = 0$, έχουμε $c = 0$, οπότε:

$$e^{-2x}y(x) = x$$

$$y(x) = xe^{2x}.$$



Εφαρμογή 2. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) + 2\int_0^x f(t)\,dt.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 3. Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(x) = x + \int_0^x 3xty(t)\,dt \quad (3)$$

Λύση

Θέτουμε $Y(x) = \int_0^x ty(t)\,dt$. Τότε η εξίσωση (3) γράφεται:

$$y(x) = x + 3xY(x).$$

Επίσης $Y'(x) = xy(x) = x^2 + 3x^2Y(x)$ και $Y(0) = 0$. Άρα ζητάμε τη συνάρτηση $Y(x)$ για την οποία ισχύει:

$$Y'(x) = x^2 + 3x^2Y(x) \text{ και } Y(0) = 0.$$

Έχουμε:

$$Y'(x) = x^2 + 3x^2Y(x) \Leftrightarrow Y'(x) - 3x^2Y(x) = x^2.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης. Για να τη λύσουμε πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-x^3}. Έτσι η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$e^{-x^3}Y'(x) - 3x^2e^{-x^3}Y(x) = x^2e^{-x^3}$$

$$e^{-x^3}Y'(x) + \left(e^{-x^3}\right)'Y(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' e^{-x^3}$$

$$\left(Y(x)e^{-x^3}\right)' = \left(-\frac{e^{-x^3}}{3}\right)'$$

$$Y(x)e^{-x^3} = -\frac{e^{-x^3}}{3} + c.$$

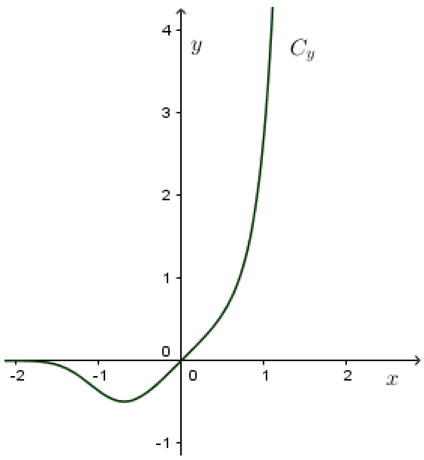
Επειδή $Y(0) = 0$, έχουμε $c = \frac{1}{3}$, οπότε:

$$Y(x)e^{-x^3} = -\frac{e^{-x^3}}{3} + \frac{1}{3}$$

$$Y(x) = \frac{1}{3}\left(e^{x^3} - 1\right).$$

Τότε:

$$y(x) = x + 3xY(x) = x + x\left(e^{x^3} - 1\right) = xe^{x^3}.$$



Εφαρμογή 3. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x + \int_0^x 3xtf(t)\,dt.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$y(x) = x + \int_0^x 3xty(t)\,dt$$

είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων, των $r(x) = x$ και $q(t) = t$. Δηλαδή ισχύει:

$$K(x,t) = xt = r(x) \cdot q(x).$$

Πυρήνες, όπως ο παραπάνω, που έχουν την ιδιότητα:

$$K(x,t) = r(x) \cdot q(x)$$

ονομάζονται **διαχωρίσιμοι**.

Παράδειγμα 4. Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)y(t)\,dt \quad (4)$$

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $Y(x) = \int_0^x y(t)\,dt$ και $Z(x) = \int_0^x ty(t)\,dt$. Τότε η εξίσωση (4) γράφεται:

$$y(x) = x^2 + xY(x) - Z(x)$$

οπότε παραγωγίζοντας έχουμε:

$$y'(x) = 2x + Y(x) + xY'(x) - Z'(x) \quad (5)$$

Επειδή $Y'(x) = y(x)$ και $Z'(x) = xy(x)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y'(x) = 2x + Y(x)$$
$$y''(x) = 2 + Y'(x)$$
$$y''(x) = 2 + y(x)$$
$$y''(x) - y(x) = 2$$
$$y''(x) - y'(x) + y'(x) - y(x) = 2$$
$$[y'(x) - y(x)]' + y'(x) - y(x) = 2$$

Αν θέσουμε $h(x) = y'(x) - y(x)$, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$h'(x) + h(x) = 2$$

η οποία είναι διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης. Για να τη λύσουμε πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^x. Έτσι η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$e^x h'(x) + e^x h(x) = 2e^x$$
$$[e^x h(x)]' = 2e^x$$

$$e^x h(x) = 2e^x + c.$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι $y'(x) = y(x) = 0$, οπότε $h(0) = 0$ και $c = -2$. Έχουμε διαδοχικά:

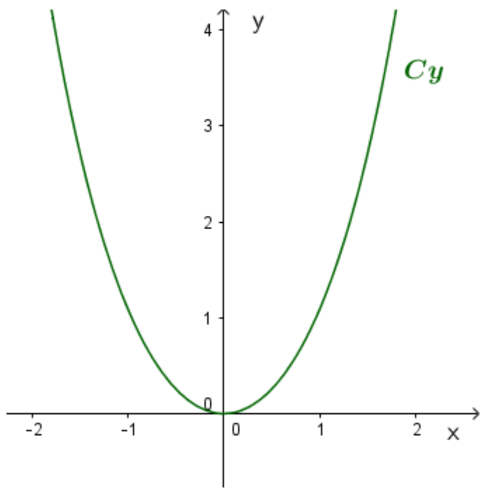
$$e^x h(x) = 2e^x - 2$$
$$h(x) = 2 - 2e^{-x}$$
$$y'(x) - y(x) = 2 - 2e^{-x}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης. Για να τη λύσουμε πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-x}. Έχουμε:

$$e^{-x}y'(x) - e^{-x}y(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$$
$$[e^{-x}y(x)]' = (e^{-2x} - 2e^{-x})'$$
$$e^{-x}y(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + c.$$

Επειδή $y(0) = 0$ ισχύει ότι $c = 1$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$e^{-x}y(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$$
$$y(x) = e^{-x} - 2 + e^x.$$



Εφαρμογή 4. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 + \int_0^x tf(x-t)\,dt.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Β. Εξίσωση Fredholm.

Παράδειγμα 1. Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(x) = x + \int_0^1 (x^2 + x) t y(t)\, dt \quad (6)$$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση (6) γράφεται:

$$y(x) = x + (x^2 + x) \int_0^1 t y(t)\, dt \quad (7)$$

οπότε αν θέσουμε $I = \int_0^1 t y(t)\, dt$ έχουμε:

$$y(x) = x + (x^2 + x) I \quad (8)$$

Τότε:

$$I = \int_0^1 t y(t)\, dt$$

$$I = \int_0^1 t[t + (t^2 + t) I]\, dt$$

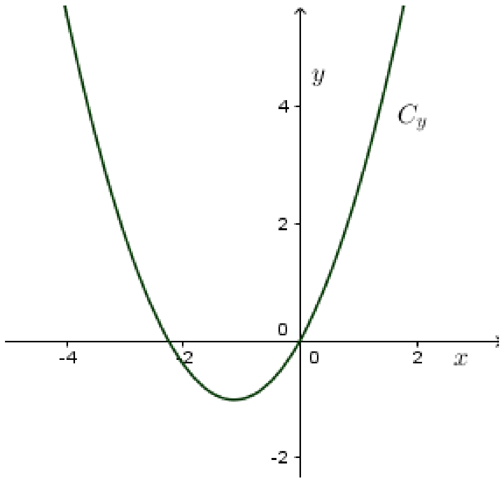
$$I = \int_0^1 [t^2 + (t^3 + t^2) I]\, dt$$

$$I = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + I \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{3} + I \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right]$$

$$12I = 4 + 7II = \frac{4}{5}.$$

Τελικά $y(x) = x + \frac{4}{5}(x^2 + x)$.



Εφαρμογή 1. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x + \int_0^1 (x^2 + x) t f(t)\, dt.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 2. Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$f(x) = \lambda \cdot \int_{-2}^{2} |x| f(t)\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = \lambda |x| \int_{-2}^{2} f(t)\, dt \quad (1)$$

οπότε αν θέσουμε $\kappa = \int_{-2}^{2} f(t)\, dt \quad$ (2), έχουμε:

$$f(x) = \lambda \cdot \kappa\, |x| \quad (3)$$

Επομένως από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$\kappa = \int_{-2}^{2} \lambda \cdot \kappa\, |t|\, dt \Leftrightarrow \kappa = \lambda \cdot \kappa \int_{-2}^{2} |t|\, dt \Leftrightarrow \kappa = \lambda \cdot \kappa \left(\int_{-2}^{0} -t dt + \int_{0}^{2} t dt \right) \Leftrightarrow$$

$$\kappa = \lambda \cdot \kappa \left(\left[-\frac{t^2}{2} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{t^2}{2} \right]_{0}^{2} \right) \Leftrightarrow \kappa = 4\kappa\lambda \Leftrightarrow \kappa(1 - 4\lambda) = 0.$$

Αν $\kappa = 0$ έχουμε τετριμμένες λύσεις.

Επομένως είναι $\lambda = \frac{1}{4}$, και από την σχέση (3) έχουμε $f(x) = \frac{1}{4} \kappa\, |x| \xRightarrow{c = \kappa/4}$

$$f(x) = c\, |x|.$$

Παράδειγμα 3. Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$f(x) = \lambda \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu t\, f(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = \lambda \cdot \eta\mu x \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu t\, f(t)\, dt \quad (1)$$

οπότε αν θέσουμε $\kappa = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu t\, f(t)\, dt$ (2), έχουμε:

$$f(x) = \lambda \cdot \kappa\, \eta\mu x \quad (3)$$

Επομένως από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$\kappa = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu t \cdot (\lambda \cdot \kappa\, \eta\mu t)\, dt \Leftrightarrow \kappa = \kappa\, \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu t\, \sigma\upsilon\nu t\, dt \xLeftrightarrow{\eta\mu 2t = 2\eta\mu t\, \sigma\upsilon\nu t}$$

$$\kappa = \frac{1}{2}\kappa\, \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2t\, dt \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{4}\kappa\, \lambda [\sigma\upsilon\nu 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{2}\kappa\, \lambda \Leftrightarrow \kappa\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) = 0$$

Αν $\kappa = 0$ έχουμε τετριμμένες λύσεις.

Επομένως είναι $\lambda = 2$, και από την σχέση (3) έχουμε $f(x) = 2\kappa\, \eta\mu x \xRightarrow{c = 2\kappa}$

$$f(x) = c \cdot \eta\mu x.$$

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$f'(x) = f(x) + \int_0^{ln2} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ f(0) = 2.$$

<u>Λύση</u>

Θεωρώντας:

$$c = \int_0^{ln2} f(t)\, dt \quad (1)$$

η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα $f'(x) = f(x) + c$.

Θέτοντας στη συνέχεια $h(x) = f(x) + c$ έχουμε:

$$h'(x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $h(x) = \kappa e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα είναι:

$$f(x) = \kappa e^x - c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή όμως είναι $f(0) = 2$, προκύπτει ότι $\kappa = c + 2$ και ως εκ τούτου:

$$f(x) = (c + 2)e^x - c, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Για τον υπολογισμό της σταθεράς c, από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε διαδοχικά:

$$c = \int_0^{ln2} [(c+2)e^t - c]\, dt$$

$$c = [(c+2)e^t - c\, t]_0^{ln2}$$

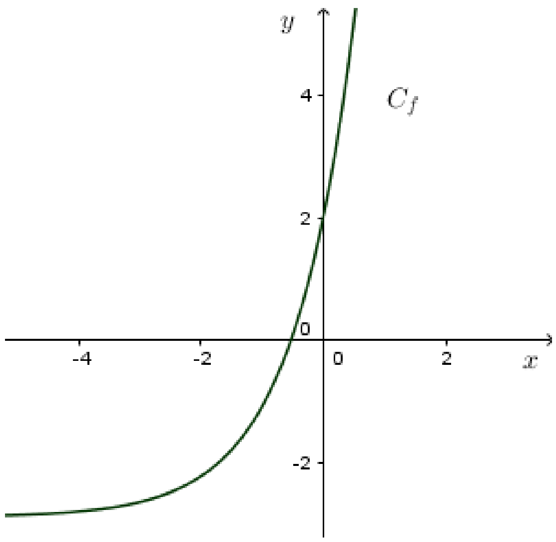
$$c = (c+2)e^{ln2} - c\, ln2 - c - 2$$

$$c\, ln2 = 2$$

$$c = \frac{2}{ln2}.$$

Επομένως $\kappa = 2 + \frac{2}{ln2}$ και η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = \left(2 + \frac{2}{ln2}\right)e^x - \frac{2}{ln2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{o}:

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Πτώση σωμάτων με αντίσταση του αέρα

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m που πέφτει κατακόρυφα υπό την επίδραση της βαρύτητας και της αντίστασης του αέρα που είναι ανάλογη της ταχύτητας v του σώματος. Σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα του Newton η συνολική δύναμη που προκαλεί την κίνηση ενός σώματος ισούται με την ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της ορμής. Για σταθερή μάζα m θα είναι:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

όπου F είναι η συνολική δύναμη και v η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t.

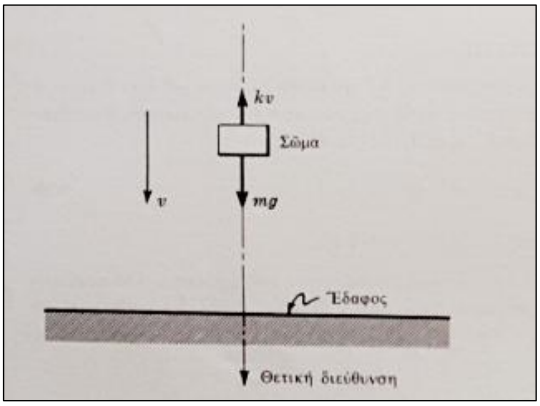
Η δύναμη F είναι η συνισταμένη δύο δυνάμεων, του βάρους του σώματος, που ισούται με mg, και της αντίστασης του αέρα, που ισούται με kv όπου k η σταθερά αναλογίας. Η αντίσταση του αέρα είναι αντίθετη στην ταχύτητα. Επομένως η δύναμη F θα είναι:

$$F = mg - kv \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad (1)$$

Για την οριακή ταχύτητα ισχύει η σχέση :

$$mg - kv_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{v_1} \quad (2)$$

Πρόβλημα 1^{o}. Ένα σώμα βάρους $64\,N$ (newton) εκτοξεύεται προς τα κάτω από ύψος $100m$ με αρχική ταχύτητα $10m/s$. Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς την ταχύτητα του σώματος. Αν η οριακή ταχύτητα του σώματος είναι $39{,}2m/s$, να βρεθούν:



Α) η ταχύτητα του σώματος

B) η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t.

<u>Λύση</u>

A) Από τη σχέση (2) για $v_1 = 39{,}2$ και $g = 9{,}8$ προκύπτει $\frac{k}{m} = \frac{1}{4}$. Από την (1) έχουμε:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + 0{,}25v = 9{,}8 \Leftrightarrow e^{0{,}25t}\frac{dv}{dt} + 0{,}25e^{0{,}25t}v = 9{,}8e^{0{,}25t} \Leftrightarrow$$

$$(e^{0{,}25t}v)' = (39{,}2e^{0{,}25t})' \Leftrightarrow e^{0{,}25t}v = 39{,}2e^{0{,}25t} + c_1 \Leftrightarrow$$

$$v = 39{,}2 + c_1 e^{-0{,}25t} \quad (3)$$

Για $t = 0$ είναι $v = 10$. Οπότε από τη (3) έχουμε: $10 = 39{,}2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -29{,}2$.

Συνεπώς η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή t είναι:

$$v = 39{,}2 - 29{,}2e^{-0{,}25t}.$$

B) Ισχύει ότι:

$$\frac{dx}{dt} = v \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = 39{,}2 - 29{,}2e^{-0{,}25t} \Leftrightarrow$$

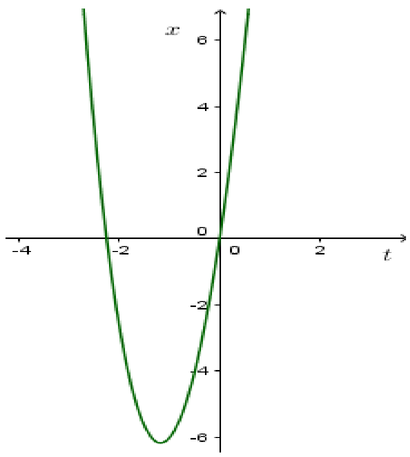
$$\frac{dx}{dt} = (39{,}2t + 116{,}8e^{-0{,}25t})' \Leftrightarrow$$

$$x = 39{,}2t + 116{,}8e^{-0{,}25t} + c_2 \quad (4)$$

Για $t = 0$ είναι $x = 0$. Οπότε έχουμε: $0 = 116{,}8 + c_2 \Rightarrow c_2 = -116{,}8$.

Επομένως η απομάκρυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή t είναι:

$$x = 39{,}2t + 116{,}8e^{-0{,}25t} - 116{,}8.$$

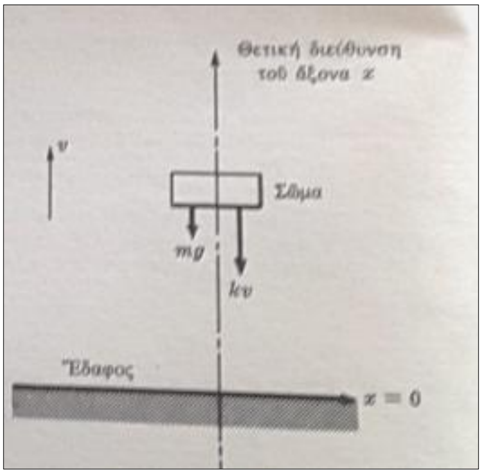


Πρόβλημα 2ο. Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα v_0. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος, να βρεθούν:

Α) η εξίσωση κίνησης στο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος,

Β) η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t,

Γ) η στιγμή κατά την οποία το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος.



<u>Λύση</u>

Α) Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε ότι καθώς το σώμα ανεβαίνει, το βάρος mg και η αντίσταση του αέρα επιβραδύνουν την κίνησή του. Επομένως έχουμε:

$$F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$$

η οποία είναι η ζητούμενη εξίσωση κίνησης.

Β) Είναι:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \ \Rightarrow e^{\frac{kt}{m}}\frac{dv}{dt} + e^{\frac{kt}{m}}\frac{k}{m}v = -ge^{\frac{kt}{m}} \Rightarrow \left(e^{\frac{kt}{m}}v\right)' = \left(-\frac{gm}{k}e^{\frac{kt}{m}}\right)' \Rightarrow$$

$$e^{\frac{kt}{m}}v = -\frac{gm}{k}e^{\frac{kt}{m}} + c \quad (3)$$

Για $t = 0$ ισχύει $v = v_0$ οπότε από τη (3) έχουμε:

$$v_0 = -\frac{gm}{k} + c \Rightarrow c = v_0 + \frac{gm}{k}.$$

Από τη (3) προκύπτει:

$$e^{\frac{kt}{m}}v = -\frac{gm}{k}e^{\frac{kt}{m}} + v_0 + \frac{gm}{k} \Rightarrow v = -\frac{gm}{k} + \left(v_0 + \frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Γ) Το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος όταν η ταχύτητα γίνει 0.

Οπότε έχουμε:

$$-\frac{gm}{k} + \left(v_0 + \frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} = 0 \Rightarrow \left(v_0 + \frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{gm}{k} \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{\frac{gm}{k}}{v_0 + \frac{gm}{k}} \Rightarrow e^{\frac{kt}{m}} = \frac{v_0 + \frac{gm}{k}}{\frac{gm}{k}} \Rightarrow e^{\frac{kt}{m}} = \frac{v_0 k}{gm} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{kt}{m} = ln\left(\frac{v_0 k}{gm} + 1\right) \Rightarrow t = \frac{m}{k} ln\left(\frac{v_0 k}{gm} + 1\right).$$

2. Προβλήματα Ψύξεως

Ο Νόμος Ψύξης του Νεύτωνα

Είναι γνωστό από εμπειρικές παρατηρήσεις ότι η θερμοκρασία ενός αντικειμένου μεταβάλλεται με ρυθμό ανάλογο της διαφοράς της θερμοκρασίας του αντικειμένου από εκείνης του περιβάλλοντος χώρου του. Αυτός είναι γνωστός ως ο ***Νόμος Ψύξης του Νεύτωνα***. Έτσι λοιπόν, αν $\theta(t)$ είναι η θερμοκρασία του αντικειμένου μία χρονική στιγμή t και θ_0 είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος, τότε είναι:

$$\theta'(t) = k(\theta(t) - \theta_0)$$

όπου k είναι η σταθερά της αναλογίας. Ένας τρόπος επίλυσής της είναι να την αντιμετωπίσουμε ως γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\theta'(t) - k\theta(t) = -k\theta_0$$

$$e^{-kt}\theta'(t) - ke^{-kt}\theta(t) = -ke^{-kt}\theta_0$$

$$\left(e^{-kt}\theta(t)\right)' = (\theta_0 e^{-kt})'$$

$$e^{-kt}\theta(t) = \theta_0 e^{-kt} + c$$

$$\theta(t) = \theta_0 + ce^{kt}.$$

Πρόβλημα 1^{o}. Ας υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία ενός φρέσκου σερβιρισμένου καφέ είναι $90°$ Κελσίου. Ένα λεπτό αργότερα η θερμοκρασία του έχει κατέβει στους $85°$ Κελσίου σε ένα δωμάτιο σταθερής θερμοκρασίας $20°$ Κελσίου. Να βρεθεί πόσος χρόνος θα περάσει, έτσι ώστε η θερμοκρασία του καφέ να γίνει $50°$ Κελσίου. Να βρεθεί επίσης η θερμοκρασία του καφέ όταν $t \to \infty$.

<u>Λύση</u>

Αν $\theta(t)$ είναι η θερμοκρασία του καφέ (σε βαθμούς Κελσίου) μία χρονική στιγμή t (σε λεπτά), τότε σύμφωνα με τον Νόμος Ψύξης του Νεύτωνα, έχουμε:

$$\theta(t) = 20 + ce^{kt}.$$

Αλλά έχουμε ότι $\theta(0) = 90$ και $\theta(1) = 85$. Συνεπώς είναι:

$$90 = 20 + c \Rightarrow c = 70$$

$$85 = 20 + 70e^k \Rightarrow e^k = {}^{65}/_{70} \Rightarrow k = ln\left(\frac{65}{70}\right) \simeq -0{,}0741.$$

Επομένως η θερμοκρασία του καφέ κάθε χρονική στιγμή είναι:

$$\theta(t) = 20 + 70\, e^{-0{,}0741t}.$$

Α) Για να βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η θερμοκρασία του καφέ θα είναι 50° Κελσίου, θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

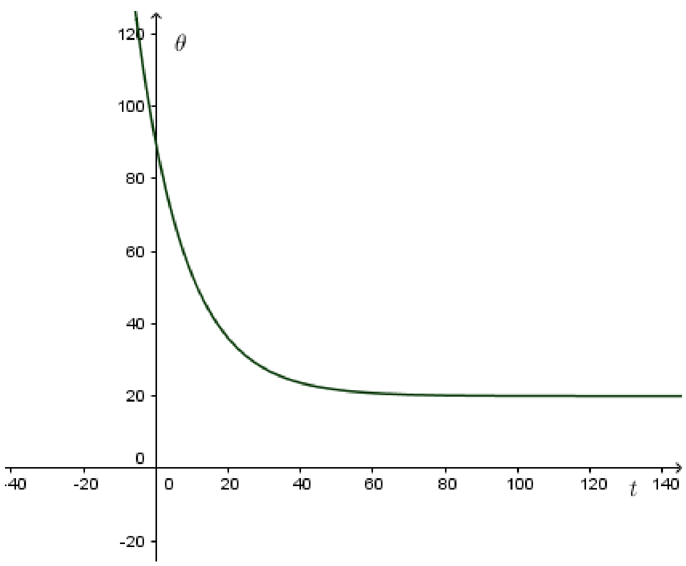
$$50 = 20 + 70\, e^{-0{,}0741\, t} \Leftrightarrow -0{,}0741\, t = \ln\left(\frac{3}{7}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{3}{7}\right)}{-0{,}0741} \simeq 11{,}43 \text{ λεπτά.}$$

Β) Ζητάμε το όριο του $\theta(t)$ όταν το $t \to \infty$. Πρακτικά δηλαδή ζητάμε να δούμε ποια θα είναι η θερμοκρασία του καφέ μετά από εύλογα μεγάλο χρονικό διάστημα.

Αφού $ln\left(\frac{65}{70}\right) < 0$, έχουμε ότι:

$$\lim_{t\to\infty} e^{ln\left(\frac{65}{70}\right)t} = 0.$$

Επομένως ο καφές θα πάρει φυσιολογικά τη θερμοκρασία του δωματίου στο οποίο βρίσκεται, δηλαδή τους 20° Κελσίου.



Πρόβλημα 2ο. Μία μεταλλική ράβδος έχει θερμοκρασία $100°\ C$ και τοποθετείται σε χώρο που έχει θερμοκρασία $20°\ C$. Αν μετά από 20 min η θερμοκρασία της ράβδου πέσει στους $50°\ C$ να υπολογισθούν:

Α) ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει η ράβδος στους $25°\ C$,

Β) η θερμοκρασία της ράβδου μετά από 10 min.

<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι:

$$\frac{dT}{dt}+kT=0 \Leftrightarrow e^{kt}\frac{dT}{dt}+e^{kt}kT=0 \Leftrightarrow (e^{kt}T)'=0 \Leftrightarrow e^{kt}T=c \Leftrightarrow T=ce^{-kt}.$$

Για $t=0$ είναι $T=100$. Επομένως $c=100$, άρα:

$$T=100e^{-kt} \qquad (1)$$

Για $t=20$ θα είναι $T=50$.

Οπότε από την (1) έχουμε:

$$50=100e^{-20k} \Leftrightarrow e^{-20k}=0{,}5 \Leftrightarrow -20k=-ln2 \Leftrightarrow k=\frac{ln2}{20} \Leftrightarrow k=0{,}05ln2.$$

Συνεπώς $T=100e^{-(0{,}05ln2)t} \qquad (2)$

Α) Θέτοντας στην (2) όπου $T=25$ προκύπτει:

$$25=100e^{-(0{,}05ln2)t} \Leftrightarrow 0{,}25=e^{-(0{,}05ln2)t} \Leftrightarrow$$

$$-(0{,}05ln2)t=ln0{,}25 \Leftrightarrow$$

$$t=\frac{ln4}{0{,}05ln2} \Leftrightarrow$$

$$t=40.$$

Β) Θέτοντας στη (2) όπου $t=10$ βρίσκουμε:

$$T=100e^{-(0{,}05ln2)10}=100e^{-0{,}5ln2}=100e^{ln2^{-0{,}5}}=100\cdot 2^{-0{,}5}\simeq 70{,}7.$$

3. Προβλήματα Αύξησης – Μείωσης

Έστω $N(t)$ ο πληθυσμός ή η ποσότητα μίας ουσίας τη χρονική στιγμή t που αυξάνεται ή μειώνεται. Αν θεωρήσουμε ότι η αύξηση ανά μονάδα χρόνου dN/dt του πληθυσμού ή της ουσίας είναι ανάλογη του πληθυσμού ή της ποσότητας, τότε:

$$\frac{dN}{dt} = kN \Leftrightarrow \frac{dN}{dt} - kN = 0$$

όπου k η σταθερά αναλογίας. Δεχόμαστε ότι η συνάρτηση $N(t)$ είναι μία παραγωγίσιμη άρα και συνεχής συνάρτηση χρόνου αν και στα προβλήματα πληθυσμού η συνάρτηση $N(t)$ στην πραγματικότητα παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Σε αυτήν την περίπτωση η παραπάνω σχέση περιγράφει το φαινόμενο ικανοποιητικά.

Πρόβλημα. Έχει διαπιστωθεί ότι η αύξηση του πληθυσμού μίας περιοχής ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογη προς τον πληθυσμό. Αν σε δύο χρόνια ο πληθυσμός αυτής της περιοχής διπλασιάστηκε και σε τρία χρόνια έφτασε τους 20000, να υπολογισθεί ο αρχικός πληθυσμός.

Λύση

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t ο πληθυσμός είναι N και ο αρχικός πληθυσμός είναι N_0, τότε:

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \Leftrightarrow e^{-kt}\frac{dN}{dt} - e^{-kt}kN = 0 \Leftrightarrow (e^{-kt}N)' = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt}N = c_1 \Leftrightarrow N = c_1 e^{kt} \quad (1)$$

Για $t = 0$ είναι $N = N_0$ οπότε από (1) έχουμε: $N_0 = c_1$, συνεπώς $N = N_0 e^{kt}$ (2)

Για $t = 2$ είναι $N = 2N_0$ και από τη (2) προκύπτει:

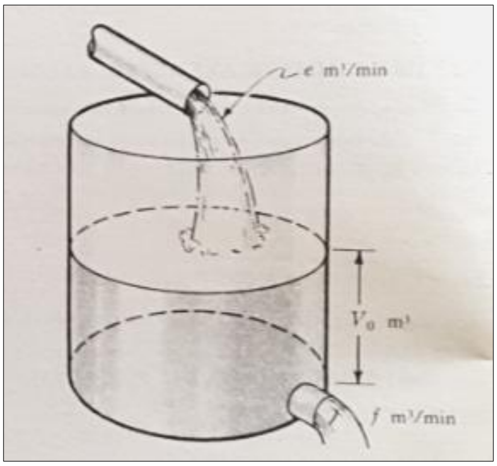
$$N_0 e^{2k} = 2N_0 \Leftrightarrow e^{2k} = 2 \Leftrightarrow e^k = \sqrt{2}.$$

Για $t = 3$ είναι $N = 20000$ και από τη (2) προκύπτει:

$$N_0 e^{3k} = 20000 \Leftrightarrow N_0\left(\sqrt{2}\right)^3 = 20000 \Leftrightarrow N_0 = 10000/\sqrt{2} \Leftrightarrow N_0 \simeq 7072.$$

4. Προβλήματα Αραίωσης Διαλύματος

Θεωρούμε ένα δοχείο που αρχικά περιέχει $V_0 m^3$ διαλύματος νερού με α kg αλάτι. Ένα άλλο διάλυμα με b kg αλάτι ανά m^3 χύνεται στο δοχείο με ρυθμό $e\ m^3/min$. Συγχρόνως το διάλυμα του δοχείου ανακατεύεται καλά και αδειάζει με ρυθμό f m^3/min. Ζητείται να βρεθεί πόσο αλάτι έχει το δοχείο τη χρονική στιγμή t.



Έστω Q η ζητούμενη ποσότητα του αλατιού. Η μεταβολή της Q ανά μονάδα χρόνου dQ/dt ισούται με τη διαφορά της ποσότητας του αλατιού που αφαιρείται από τη ποσότητα του αλατιού που μπαίνει στο δοχείο ανά μονάδα χρόνου. Η ποσότητα του αλατιού που μπαίνει στο δοχείο είναι be kg/min. Για να βρούμε το αλάτι που αδειάζει πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον όγκο του διαλύματος στο δοχείο τη χρονική στιγμή t, που είναι $V_0 + et - ft\ m^3$. Η περιεκτικότητα του διαλύματος στο δοχείο σε αλάτι είναι:

$$\frac{Q}{V_0 + et - ft}.$$

Οπότε το αλάτι που αδειάζει ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$\frac{fQ}{V_0 + et - ft}\mathrm{kg/min}$$

Άρα:

$$\frac{dQ}{dt} = be - \frac{fQ}{V_0 + et - ft} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{fQ}{V_0 + et - ft} = be.$$

Για $t = 0$ είναι $Q = a$.

Πρόβλημα. Ένα δοχείο χωρητικότητας 50 m^3 περιέχει αρχικά 10 m^3 καθαρού νερού. Χύνουμε στο δοχείο ένα διάλυμα περιεκτικότητας 1 kg/m^3 σε αλάτι με ρυθμό 4 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ ενώ ταυτόχρονα φεύγει από το δοχείο ανακατεμένο διάλυμα με ρυθμό 2 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Να υπολογισθούν:

Α) ο χρόνος που απαιτείται για να γεμίσει το δοχείο,

Β) η ποσότητα του αλατιού όταν γεμίσει το δοχείο.

<u>Λύση</u>

Α) Ο όγκος του διαλύματος κάθε χρονική στιγμή t είναι: $10 + 4\,t - 2t = 10 + 2t$.

Όταν γεμίσει το δοχείο θα είναι: $10 + 2t = 50 \Leftrightarrow t = 20$.

Άρα το δοχείο θα γεμίσει σε 20 λεπτά.

Β) Έστω Q η ποσότητα του αλατιού στο δοχείο τη χρονική στιγμή t. Το αλάτι που μπαίνει στο δοχείο ανά μονάδα χρόνου είναι 4 $\mathrm{kg/min}$.

Τη χρονική στιγμή t ο όγκος του διαλύματος στο δοχείο είναι $10 + 2t$. Η περιεκτικότητα σε αλάτι του διαλύματος στο δοχείο την ίδια χρονική στιγμή t θα είναι:

$$\frac{Q}{10+2t}$$

Οπότε το αλάτι που φεύγει ανά μονάδα χρόνου θα είναι:

$$\frac{2Q}{2t+10}\ \mathrm{kg/min}.$$

Άρα προκύπτει η σχέση:

$$\frac{dQ}{dt} = 4 - \frac{2Q}{2t+10} \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{t+5} = 4 \Leftrightarrow$$

$$(t+5)\frac{dQ}{dt} + Q = 4(t+5) \Leftrightarrow$$

$$\big((t+5)Q\big)' = (2t^2 + 20t)' \Leftrightarrow$$

$$(t+5)Q = 2t^2 + 20t + c \quad (1)$$

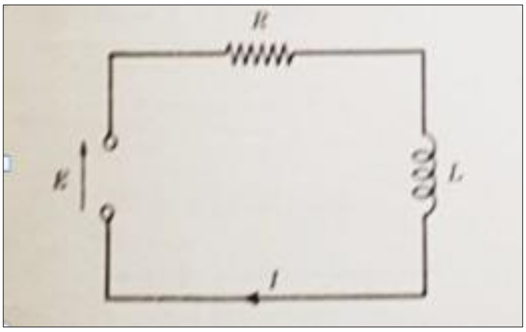
Για $t = 0$ είναι $Q = 0$, οπότε $c = 0$ και από την (1) προκύπτει:

$$Q = \frac{2t^2 + 20t}{t + 5}.$$

Το δοχείο γεμίζει όταν $t = 20$ και η ποσότητα του αλατιού εκείνη τη στιγμή θα είναι:

$$Q = \frac{2t^2 + 20t}{t + 5} = \frac{2 \cdot 20^2 + 20 \cdot 20}{20 + 5} = 48 \text{ kg}.$$

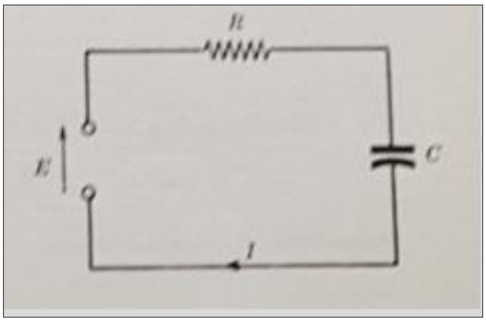
5. Ηλεκτρικά Κυκλώματα



Η βασική εξίσωση που περιγράφει τα φαινόμενο ροής ηλεκτρικού φορτίου σε ένα απλό κύκλωμα με μία αντίσταση R (σε Ohm) μια αυτεπαγωγή L (σε enry) και μία ηλεκτρεγερτική δύναμη Ε (σε Volt) είναι:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \quad (1)$$

όπου I η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος (σε Ampere).



Σε ένα κύκλωμα με αντίσταση R και χωρητικότητα C (σε Farad) η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R} \quad (2)$$

Όπου q (σε Coulomb) το ηλεκτρικό φορτίο του πυκνωτή και ισχύει:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Πρόβλημα. Ένα κύκλωμα περιλαμβάνει μία πηγή με ΗΕΔ $3sin2t\ V$(volt), μία αντίσταση 10 Ω(Ohm) και μία αυτεπαγωγή 0,5 H(henry). Να υπολογισθεί η ένταση του ρεύματος I που διαρρέει το κύκλωμα τη χρονική στιγμή t, αν αρχικά ήταν 6 A (ampere).

<u>Λύση</u>

Είναι $E = 3sin2t,\ R = 10$ και $L = -0{,}5$. Οπότε από την (1) έχουμε:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{10}{0{,}5}I = \frac{3sin2t}{0{,}5} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 20I = 6sin2t \Rightarrow$$

$$e^{20t}\frac{dI}{dt} + 20e^{20t}I = 6e^{20t}sin2t \Rightarrow (e^{20t}I)' = 6e^{20t}sin2t.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $A = \int 6e^{20t}sin2tdt$.

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι: $A = \frac{3}{101}e^{20t}(10sin2t - cos2t)$.

Επομένως $e^{20t}I = \frac{3}{101}e^{20t}(10sin2t - cos2t) + c$ (3)

Για $t = 0$ είναι $I = 6$ άρα από την (3) έχουμε:

$$6 = -\frac{3}{101} + c \Leftrightarrow c = \frac{609}{101}.$$

Οπότε $I = \frac{3}{101}(10sin2t - cos2t) + \frac{609}{101}e^{-20t}$.

6. Πρόβλημα Γνωστικής Ψυχολογίας

Έστω M η συνολική γνώση που πρέπει να κατακτηθεί από ένα άτομο. Η γνώση που έχει ήδη κατακτηθεί τη χρονική στιγμή t είναι $y = y(t)$ και $y_0 = y(0) = 0$. Ο ρυθμός με τον οποίο μαθαίνει το άτομο είναι ανάλογος του υπολοίπου της γνώσης που πρέπει να κατακτηθεί δηλαδή $y'(t) = A \cdot (M - y(t))$ όπου A αριθμός που χαρακτηρίζει το άτομο.

Α) Να βρεθεί η συνάρτηση $y(t)$.

Β) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Γ) Πώς μαθαίνει το άτομο γρηγορότερα; Ποιος είναι ο ρόλος του αριθμού A;

<u>Λύση</u>

Α) Είναι

$$y'(t) = A \cdot (M - y(t)) \Rightarrow y'(t) + A \cdot y(t) = A \cdot M \Rightarrow$$

$$e^{At}\cdot\ y'(t)+A\cdot e^{At}\cdot y(t)=\ e^{At}\cdot A\cdot M\Rightarrow\left(e^{At}\cdot y(t)\right)'=(e^{At}\cdot M)'\ \Rightarrow$$

$$e^{At}\cdot y(t)=e^{At}\cdot M+c \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ από την (1) προκύπτει ότι $c=-M$.

Οπότε είναι $e^{At}\cdot y(t)=e^{At}\cdot M-M\Rightarrow$

$$y(t)=M-M\cdot e^{-At},\ \ t\geq 0.$$

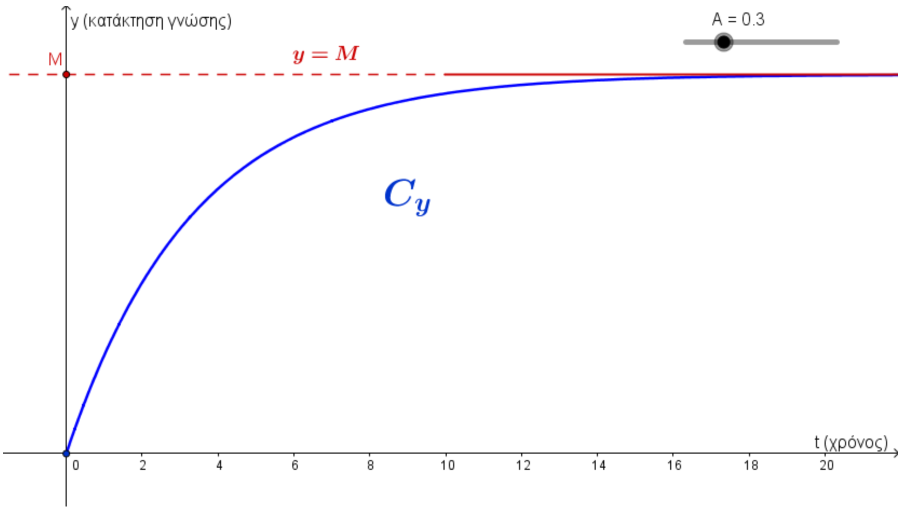
Β) Είναι $y'(t)=A\cdot M\cdot e^{-At}>0$ και $y''(t)=-A^2\cdot M\cdot e^{-At}<0$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

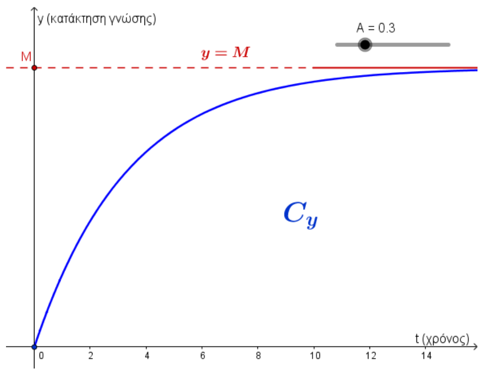
Επιπλέον η συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=M$, διότι:

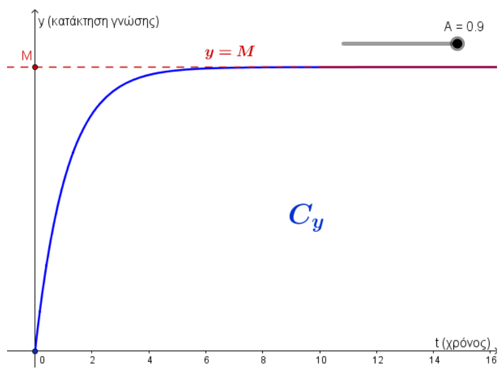
$$\lim_{t\to+\infty}(M-M\cdot e^{-At})=M.$$

Η γραφική παράσταση λοιπόν της συνάρτησης της γνώσης, είναι:



Γ) Το πόσο γρήγορα μαθαίνει ένα άτομο εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου A. Είναι δε μία τιμή που χαρακτηρίζει το κάθε άτομο και οφείλεται σε εγγενή και επίκτητα χαρακτηριστικά. Στα δύο επόμενα στιγμιότυπα φαίνεται η επίδραση της τιμής της παραμέτρου A στο ρυθμό επίτευξης του στόχου M.





Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει μελετώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, είναι ότι η καμπύλη κινείται ασυμπτωτικά προς την ευθεία που αντιστοιχεί στην επίτευξη του επιθυμητού στόχου της μάθησης. Επομένως για να επιτύχει κάποιος έναν συγκεκριμμένο στόχο πρέπει να έχει τοποθετήσει τον πήχη υψηλότερα.

7. Το Πρόβλημα της Ταχύτητας Διάδοσης μιας Είδησης

Μία είδηση διαδίδεται από στόμα σε στόμα σε έναν πληθυσμό A ατόμων. Ο αριθμός των ατόμων που γνωρίζουν την είδηση κάθε χρονική στιγμή t είναι $P(t)$ ενώ τη χρονική στιγμή $t = 0$ μόνο ένα άτομο γνωρίζει την είδηση. Η ταχύτητα (ο ρυθμός μεταβολής) διάδοσης της είδησης ισούται με το γινόμενο $P(t)\big(A - P(t)\big)$. Να βρεθούν:

A) Η συνάρτηση $P(t)$,

B) Το όριο $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$. Να σχολιασθεί το αποτέλεσμα.

<u>Λύση</u>

A) Ισχύει ότι: $P'(t) = P(t)\big(A - P(t)\big)$.

Επομένως:

$$P'(t) = P(t)\big(A - P(t)\big) \Rightarrow \frac{P'(t)}{\big(A - P(t)\big)^2} = \frac{P(t)}{A - P(t)} \qquad (1)$$

Θέτουμε $u(t) = \frac{1}{A-P(t)}$, οπότε:

$$u'(t) = \frac{P'(t)}{\big(A - P(t)\big)^2}$$

και $u(t) = \frac{1}{A-P(t)} \Rightarrow A - P(t) = \frac{1}{u(t)} \Rightarrow P(t) = A - \frac{1}{u(t)}$

Από την (1) προκύπτει ότι:

$$u'(t) = u(t)\left(A - \frac{1}{u(t)}\right) \Rightarrow u'(t) = A \cdot u(t) - 1$$

$$\Rightarrow u'(t) - A \cdot u(t) = -1 \Rightarrow e^{-At} \cdot u'(t) - A \cdot e^{-At} \cdot u(t) = -e^{-At}$$

$$\Rightarrow \left(e^{-At} \cdot u(t)\right)' = \left(\frac{e^{-At}}{A}\right)' \Rightarrow e^{-At} \cdot u(t) = \frac{e^{-At}}{A} + c \Rightarrow$$

$$u(t) = \frac{1}{A} + ce^{At} \qquad (2)$$

Για $t = 0$ έχουμε: $u(0) = \frac{1}{A-P(0)} = \frac{1}{A-1}$

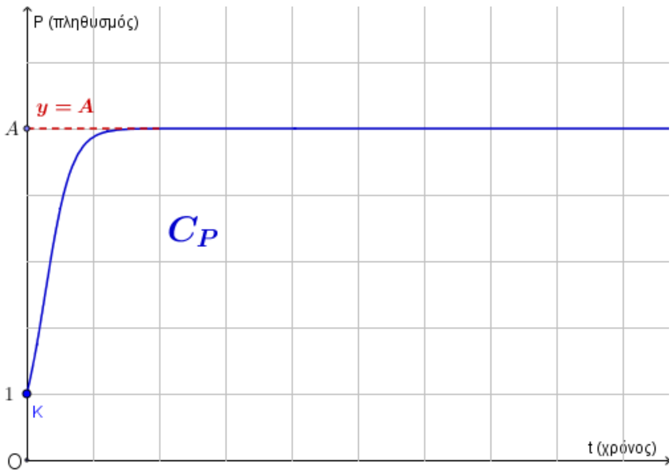
Από την (2) για $t = 0$ προκύπτει: $u(0) = \frac{1}{A} + c \Rightarrow c = \frac{1}{A-1} - \frac{1}{A} \Rightarrow c = \frac{1}{A(A-1)}$

Οπότε η (2) γίνεται:

$$u(t) = \frac{1}{A} + \frac{1}{A(A-1)}e^{At} \Rightarrow u(t) = \frac{A-1\ + e^{At}}{A(A-1)} \Rightarrow \frac{1}{A-P(t)} = \frac{A-1\ + e^{At}}{A(A-1)} \Rightarrow$$

$$A - P(t) = \frac{A(A-1)}{A-1\ + e^{At}} \Rightarrow P(t) = A - \frac{A(A-1)}{A-1\ + e^{At}} \Rightarrow$$

$$P(t) = \frac{Ae^{At}}{A-1\ + e^{At}}$$



Β) Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{Ae^{At}}{A-1+e^{At}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(Ae^{At}\right)'}{\left(A-1+e^{At}\right)'} = \lim_{t\to+\infty} \frac{A\cdot Ae^{At}}{A\cdot e^{At}} = A.$$

Επομένως μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα η είδηση θα διαδοθεί στο σύνολο του πληθυσμού.

8. Πρόβλημα Κίνησης

Κινητό κινείται επί ευθείας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ απέχει από το σημείο O, 20 cm και έχει ταχύτητα $v = 0{,}5\frac{cm}{sec}$. Αν η επιτάχυνση του κινητού κάθε χρονική στιγμή t είναι $\alpha(t) = \eta\mu t$, να βρεθούν:

Α) Η ταχύτητα $v(t)$ κάθε στιγμή t.

Β) Η απόσταση $s(t)$ κάθε στιγμή t.

<u>Λύση</u>

Α) ισχύει ότι: $\alpha(t) = v'(t)$.

Άρα: $\eta\mu t = v'(t) \Rightarrow v(t) = -\sigma\upsilon\nu t + c_1$.

Επίσης: $v(0) = 0{,}5 \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu 0 + c_1 = 0{,}5 \Rightarrow c_1 = 1{,}5$.

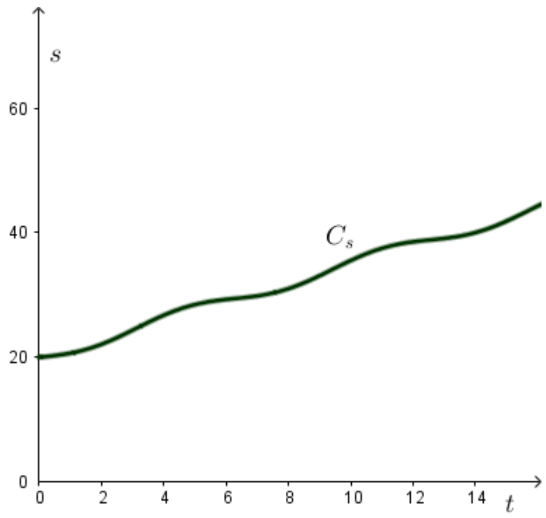
Άρα $v(t) = -\sigma\upsilon\nu t + 1{,}5,\ t \geq 0$.

Β) Ισχύει ότι: $s'(t) = v(t)$.

Άρα: $s'(t) = -\sigma\upsilon\nu t + 1{,}5 \Rightarrow s(t) = -\eta\mu t + 1{,}5t + c_2$.

Επίσης: $s(0) = 20 \Rightarrow -\eta\mu 0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 20$.

Επομένως: $s(t) = -\eta\mu t + 1{,}5t + 20,\ t \geq 0$.



9. Ραδιενεργός Αποσύνθεση

Το ισότοπο Θόριο 234 αποσυντίθεται με ρυθμό ανάλογο της ποσότητάς του σε κάθε χρονική στιγμή t. Αν από 100 gr του ισότοπου έχουν απομείνει 82,04 gr σε μία εβδομάδα, να βρεθούν:

Α) Η ποσότητα του ισότοπου σε κάθε χρονική στιγμή t.

Β) Ο χρόνος που απαιτείται, έτσι ώστε από την αρχική μάζα να απομείνει η μισή. Ο συγκεκριμένος χρόνος καλείται ***ημιζωή*** και είναι χαρακτηριστικό του κάθε ισότοπου.

Λύση

Α). Έστω $Q(t)$ η ποσότητα του Θορίου 234 σε κάθε χρονική στιγμή t, όπου το Q μετριέται σε gr και ο χρόνος t σε ημέρες. Η φυσική παρατήρηση ότι το Θόριο 234 αποσυντίθεται με ρυθμό ανάλογο της ποσότητας του σε μία δεδομένη χρονική στιγμή t, σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής $Q'(t)$ είναι ανάλογος του Q, δηλαδή ότι το Q ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$Q'(t) = kQ(t) \quad (1)$$

όπου k είναι η σταθερά της αναλογίας, η οποία πρέπει να προσδιορισθεί. Πρέπει να βρεθεί η λύση της (1), η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη:

$$Q(0) = 100 \quad (2)$$

καθώς και τη συνθήκη:

$$Q(7) = 82{,}04 \quad (3)$$

Η εξίσωση (1) μπορεί να λυθεί είτε ως γραμμική ή ως χωριζόμενων μεταβλητών (βλ. αντίστοιχα παραδείγματα) και η λύση της είναι:

$$Q(t) = ce^{kt}.$$

όπου c μία αυθαίρετη σταθερά. Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $c = 100$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι:

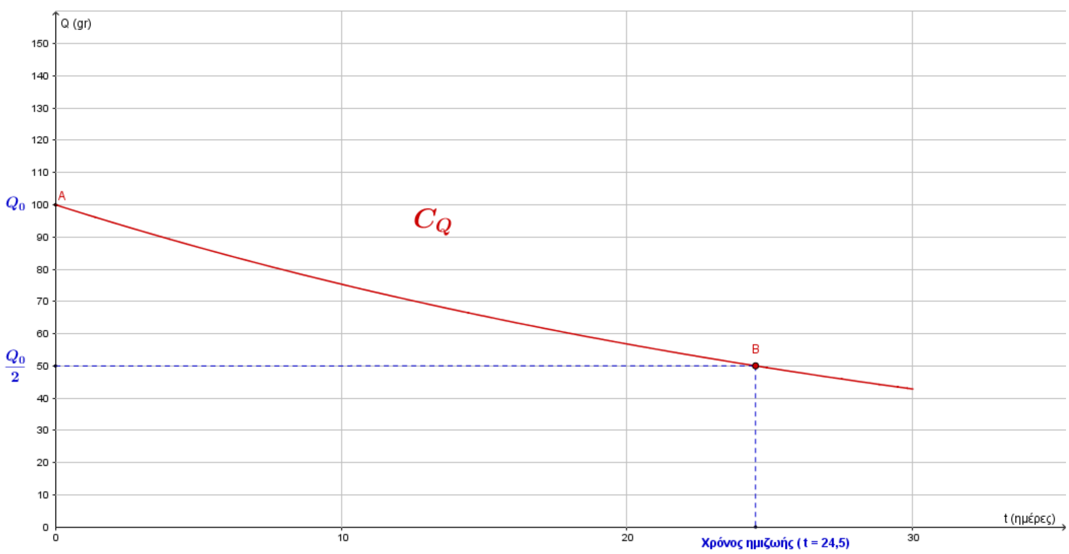
$$82{,}04 \ = 100e^{7k} \Rightarrow k = \frac{ln0{,}8204}{7} = -0{,}02828.$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$Q(t) = 100\, e^{-0{,}02828\, t}, \quad t \geq 0.$$

Β) Για να υπολογίσουμε το χρόνο ημιζωής του Θορίου 234 πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$50 \ = 100e^{kt} \Leftrightarrow kt = -ln2 \xLongleftrightarrow{k\,=\,-0{,}02828} t = \frac{ln2}{0{,}02828} \approx 24{,}5 \text{ ημέρες}$$



10. Μία σφαιρική μπάλα παγωτού λιώνει

Μία σφαιρική μπάλα παγωτού αρχίζει να λιώνει ομοιόμορφα, με την ακτίνα της να ελαττώνεται. Τα πρώτα πέντε λεπτά η ακτίνα της δίνεται από τον τύπο:

$r(t) = 40 - t^2$, όπου t $σε$ $λεπτά$ (min) και r σε χιλιοστά (mm).

Α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου $V(t)$ της μπάλας, όταν $t = 1$ min.

Β) Όταν περάσουν τα πέντε πρώτα λεπτά, η μπάλα του παγωτού τοποθετείται στη συντήρηση του ψυγείου και συνεχίζει να λιώνει, με ρυθμό μεταβολής του όγκου της κατά 50% λιγότερο από ότι εκτός ψυγείου. Αν η ακτίνα της σφαίρας μεταβάλλεται ως συνεχής συνάρτηση καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας, να βρεθεί:

Β1. Η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο της σφαιρικής μπάλας, όταν αυτή βρίσκεται μέσα στο ψυγείο.

Β2. Μετά από πόσο χρόνο θα λιώσει εντελώς.

Λύση

Α) Ως γνωστόν ο όγκος της σφαίρας δίδεται από τον τύπο $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Επομένως σε χρόνο t, ο όγκος της σφαιρικής μπάλας δίδεται από τη συνάρτηση:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t),\ t \in [0,5] \text{ με:}$$

$$r(t) = 40 - t^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της μπάλας, είναι:

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2(t) \cdot r'(t)$$

$$V'(t) = -8\pi t(40 - t^2)^2, \quad t \in [0,5]$$

Έτσι την χρονική στιγμή $t = 1$ min, είναι:

$$V'(1) = -8 \cdot 39^2\pi \ \ mm^3/min.$$

Β1. Ας συμβολίσουμε με $V_T(t)$, $t \geq 5$ τη συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο της σφαιρικής μπάλας από τη χρονική στιγμή που αυτή τοποθετείται στο ψυγείο. Αφού η ακτίνα της μπάλας συνεχίζει να μεταβάλλεται ως συνεχής συνάρτηση (με άγνωστο όμως τώρα τρόπο), η συνάρτηση του όγκου είναι και αυτή συνεχής και προφανώς παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύει:

$$V'_T(t) = \frac{1}{2}V'(t) \overset{(A\ ερώτημα)}{\Longleftrightarrow}$$

$$V'_T(t) = -4\pi t(40 - \ t^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$V'_T(t) = \left(\frac{2\pi}{3}(40 - t^2)^3\right)'.$$

Επομένως υπάρχει μία σταθερά $c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$V_T(t) = \frac{2\pi}{3}(40 - t^2)^3 + c, \quad t \geq 5$$

Από το (Α) ερώτημα όμως προκύπτει ότι $V_T(5) = V(5) = \frac{4\,\pi}{3} \cdot 15^3$ (η συνάρτηση του όγκου είναι συνεχής στο $t_0 = 5$). Επομένως η τιμή της σταθεράς $c = \frac{2\,\pi}{3} \cdot 15^3$ και ως εκ τούτου, είναι:

$$V_T(t) = \frac{2\pi}{3}(40 - t^2)^3 + \frac{2\,\pi}{3} \cdot 15^3, \quad t \geq 5.$$

Β2. Όταν η σφαιρική μπάλα λιώσει εντελώς, τότε η ακτίνα της και επομένως ο όγκος της θα μηδενισθεί. Έτσι έχουμε:

$$V_T(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\pi}{3}(40 - t^2)^3 + \frac{2\,\pi}{3} \cdot 15^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(40 - t^2)^3 = (-15)^3 \Leftrightarrow$$

$$40 - t^2 = -15 \Leftrightarrow$$

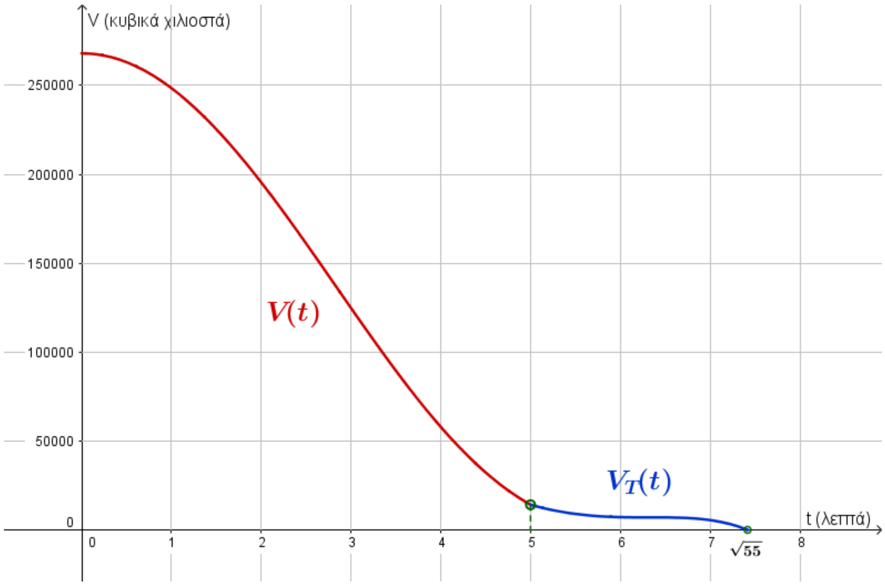
$$t = \sqrt{55}$$

Επομένως η σφαιρική μπάλα θα λιώσει εντελώς εντός του ψυγείου μετά από $\sqrt{55}$ λεπτά από την αρχή της διαδικασίας ή μετά από $\sqrt{55} - 5$ λεπτά από την στιγμή που μπήκε στο ψυγείο.

Σχόλιο. Η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο της σφαιρικής μπάλας του παγωτού καθ' όλη τη διάρκεια του προβλήματος είναι η:

$$V(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\pi\,(40-t^2)^3, & 0\le t\le 5\\ \dfrac{2\pi}{3}(40-t^2)^3+\dfrac{2\,\pi}{3}\cdot 15^3, & 5<t\le\sqrt{55}\end{cases}$$

και η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω:



11. Ορθογώνιες Τροχιές – Πρόβλημα

Οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών:

$$y = ce^x \quad (1)$$

αποδεικνύεται ότι είναι οι καμπύλες με εξισώσεις:

$$y^2 = -2x + k \quad (2).$$

Πραγματικά, έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = ce^x \xRightarrow{c = {}^{y}/_{e^x}} \frac{dy}{dx} = y.$$

Επομένως οι ορθογώνιες τροχιές της (1) είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}.$$

Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$ydy = -dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x + c_1, \quad c_1 \; σταθερά$$

$$y^2 = -2x + k, \;\; \text{όπου } k = 2c_1$$

δηλαδή η οικογένεια των καμπυλών (2).

Ας δούμε τώρα ένα πρόβλημα προσαρμοσμένο στην τρέχουσα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

Πρόβλημα: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g έτσι ώστε:

- $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$
- $g(x) = -\frac{1}{g'(x)}$, με $g(-2) = 2$

Α) Να βρείτε την οικογένεια των συναρτήσεων f.

Β) Να βρείτε την συνάρτηση g.

Γ) Να αποδείξετε ότι η C_g έχει με κάθε μία από τις C_f ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτόμενές τους τέμνονται κάθετα.

<u>Λύση</u>

Α) Έχει ήδη αποδειχθεί (μία σημαντική δ.ε. – εφαρμογή βιβλίου) με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους, ότι:

$$f(x) = ce^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή όμως είναι $f(x) > 0$, έπεται ότι $c > 0$.

Β) Για την συνάρτηση g, έχουμε:

$$g(x) = -\frac{1}{g'(x)}$$

$$g(x)g'(x) = -1$$

$$2g(x)g'(x) = -2$$

$$\left(g^2(x)\right)' = (-2x)'.$$

Επομένως, υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$g^2(x) = -2x + c_1.$$

Επειδή όμως $g(-2) = 2$, έχουμε ότι $c_1 = 0$ και ως εκ τούτου, είναι:

$$g^2(x) = -2x.$$

Τώρα είναι προφανές ότι $g^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Αν στη συνέχεια αναζητήσουμε πού μηδενίζεται η συνάρτηση g, έχουμε:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επομένως, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

- g συνεχής, (ως παραγωγίσιμη)
- $g(x) \neq 0$
- $g(-2) = 2$

Άρα η συνάρτηση g διατηρεί σταθερό πρόσημο και μάλιστα είναι:

$$g(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0).$$

Επομένως η συνάρτηση που αναζητούμε είναι η:

$$g(x) = \sqrt{-2x}\,, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Να παρατηρήσουμε επίσης ότι η συνάρτηση που βρήκαμε επαληθεύει την αρχική διαφορική εξίσωση και επιπλέον ότι είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(-\infty, 0)$.

Γ) Αν παραγωγίσουμε τις συναρτήσεις f, g έχουμε:

$$f'(x) = ce^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } g'(x) = -\tfrac{1}{\sqrt{-2x}}, x \in (-\infty, 0).$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) \cdot g'(x) = -1 \quad (1)$$

έχει μία μοναδική λύση $x_0 \in (-\infty, 0)$, για την οποία επιπλέον ισχύει ότι:

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Η (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$ce^x - \sqrt{-2x} = 0 \quad (2)$$

Θεωρούμε συνάρτηση h με $h(x) = ce^x - \sqrt{-2x}$, $x \in (-\infty, 0]$, η οποία είναι συνεχής στο Πεδίο Ορισμού της και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, με:

$$h'(x) = ce^x + \frac{1}{\sqrt{-2x}}.$$

Επειδή $h'(x) > 0$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και ως εκ τούτου είναι «1 – 1».

Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

Επίσης ισχύουν τα εξής:

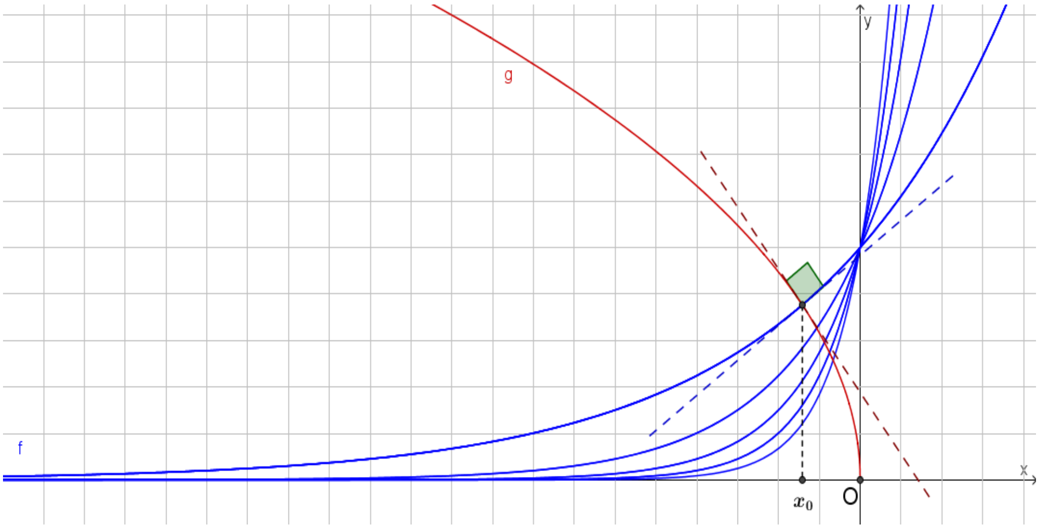
$$h(0) = c > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty.$$

Επομένως υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$.

Άρα, από τις (1) και (2), υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$$

$$f(x_0) = g(x_0).$$



12. Εμβαδόν Χωρίου

Α. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\varphi: [0,+\infty) \to \square$, τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει:

- $\varphi(x) > 0$
- $2\varphi(x) = x\varphi'(x)$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c > 0$, έτσι ώστε $\varphi(x) = cx^2$ για κάθε $x \geq 0$.

β) Αν επιπλέον η C_φ διέρχεται από το σημείο $P(1,1)$, να βρείτε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της απέχει από το σημείο $Q(0,1)$ ελάχιστη απόσταση.

Β. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
- Αν $M(t, f(t))$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της γραφικής παράστασης της f, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

  " την C_f και τις ευθείες $x = 0, x = t, \psi = 0$ "

είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία:

" $O(0,0),\ A(t,0),\ M\big(t,f(t)\big),\ B(0,f(t))$ "

Λύση

Α. α) Για $x>0$, $\varphi(x)>0$ είναι:

$$2\varphi(x)=x\varphi'(x)\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Επομένως:

$$(\ln(\varphi(x)))'=(2\ln x)'\Leftrightarrow\ln\big(\varphi(x)\big)=2\ln x+c_1\Leftrightarrow\varphi(x)=e^{2\ln x+c_1}\Leftrightarrow$$

$$\varphi(x)=e^{c_1}e^{2\ln x}\Leftrightarrow\varphi(x)=ce^{2\ln x}\Leftrightarrow\varphi(x)=ce^{\ln x^2}\Leftrightarrow\varphi(x)=cx^2.$$

Επειδή όμως η συνάρτηση φ είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, τότε:

$$\varphi(0)=\lim_{x\to0}\varphi(x)=\lim_{x\to0}cx^2=0.$$

Έτσι, είναι $\varphi(x)=cx^2$ για κάθε $x\geq0$.

β) Το σημείο $P(1,1)$ ανήκει όμως στη C_φ.

Άρα $\varphi(1)=1\Leftrightarrow c=1$ και $\varphi(x)=x^2$.

Έστω $M(x,x^2)$ τυχαίο σημείο της C_φ και η απόσταση του από το σημείο Q(0,1) είναι:

$$QM=\sqrt{(x-0)^2+(x-1)^2}=\sqrt{x^4-x^2+1}.$$

Έτσι ορίζουμε τη συνάρτηση k, με:

$$k(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}\,,\quad x\geq0$$

Είναι $k'(x)=\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}},\quad x\geq0.$

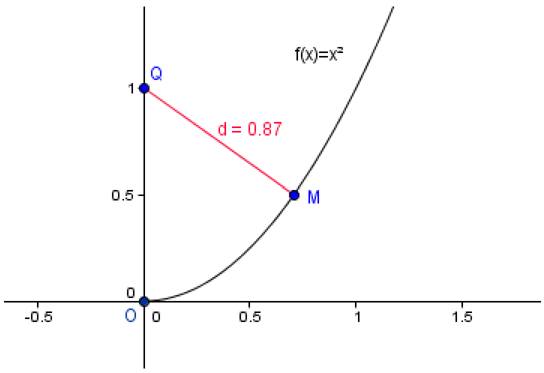
Τότε έχουμε:

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x = 0 \overset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x > 0 \overset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x < 0 \overset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Δηλαδή η συνάρτηση k είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Επομένως το σημείο $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, δηλαδή το $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ είναι το σημείο της C_φ που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Q.



Β. Το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από:

“ την C_f και τις ευθείες $x = 0, x = t, \psi = 0$ ”

δίνεται από τη συνάρτηση:

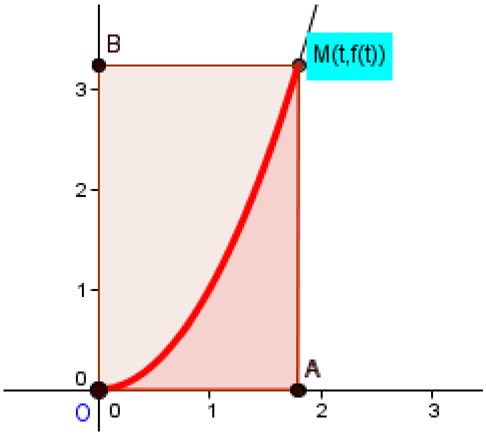
$$E_1(t) = \int_0^t f(x)\, dx$$

η οποία ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Το εμβαδόν E_2 του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία:

“$O(0,0),\ A(t,0),\ M(t, f(t)),\ B(0, f(t))$”

δίνεται από τη συνάρτηση $E_2(t) = t \cdot f(t)$.



Είναι λοιπόν:

$$E_1 = \frac{1}{3}E_2 \Leftrightarrow \int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,t \cdot f(t).$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη, έχουμε:

$$f(t) = \frac{1}{3}\left(f(t) + tf'(t)\right) \Leftrightarrow 2f(t) = tf'(t).$$

Καταλήγουμε δηλαδή στη διαφορική εξίσωση του πρώτου ερωτήματος.

Επομένως, η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0$$

Σχόλιο. ***Γενίκευση του Προβλήματος***

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,+\infty)$, για την οποία $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, έτσι ώστε:

$$E_1 = \frac{1}{n}\,E_2, \quad n \geq 2$$

Τότε πρέπει να ικανοποιείται η επόμενη εξίσωση ***(ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2ου είδους)****:*

$$\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{n}\,t \cdot f(t).$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς t, παίρνουμε:

$$f(t) = \frac{1}{n}\left(f(t) + tf'(t)\right) \Rightarrow f'(t) = \frac{n-1}{t} f(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{n-1}{t},$$

για την οποία ισχύει:

$$(ln(f(t)))' = ((n-1) \cdot ln\, t)'.$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$f(t) = c\, t^{n-1}, \text{ όπου } c \text{ σταθερά.}$$

13. Παραμετρικές Εξισώσεις

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται επάνω στο επίπεδο Oxy με τέτοιον τρόπο, ώστε:

$$x'(t) = \frac{1}{t+2} \quad \text{και} \quad y'(t) = 2t, \quad \text{για } t \geq 0.$$

α) Να εκφράσετε τα x και y ως συναρτήσεις του t, αν $x = ln2$ και $y = 1$ όταν $t = 0$.

β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

γ) Να εκφράσετε το x ως συνάρτηση του y.

δ) Να βρείτε τον μέσο όρο της μεταβολής του y ως προς x, καθώς το t μεταβάλλεται από 0 έως 2.

ε) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς x, όταν $t = 1$.

Λύση

α) Έχουμε διαδοχικά, για κάθε $t \geq 0$:

$$x'(t) = \frac{1}{t+2}$$

$$x(t) = \ln(t+2) + c_1.$$

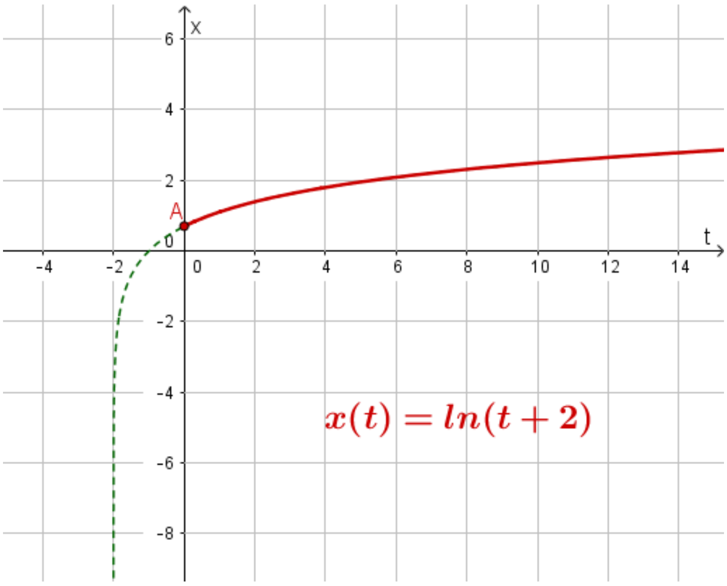
Αφού $x(0) = ln2$, τότε $c_1 = 0$ και ως εκ τούτου είναι $x(t) = \ln(t+2)$.

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επίσης είναι $x(0) = ln2$ και

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty.$$

Επομένως το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης, είναι: $x\big([0,+\infty)\big) = [ln2,+\infty)$.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



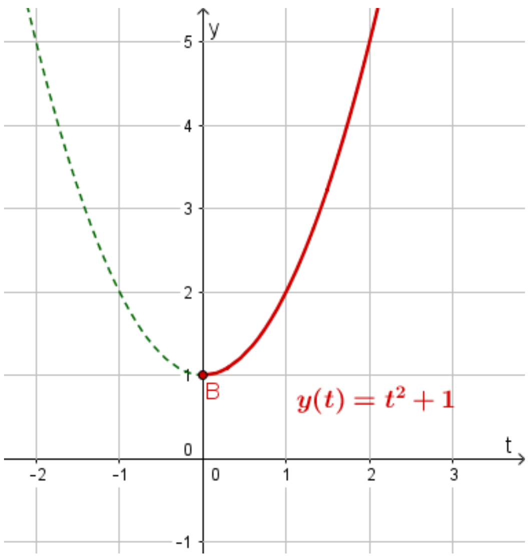
Αντίστοιχα, για την επόμενη συνάρτηση, έχουμε διαδοχικά:

$$y'(t) = 2t$$

$$y(t) = t^2 + c_2$$

Αφού $y(0) = 1$, τότε $c_2 = 1$ και ως εκ τούτου είναι $y(t) = t^2 + 1$.

Το Σύνολο Τιμών της ανωτέρω συνάρτησης είναι προφανώς το διάστημα $[1,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



β) Είναι λοιπόν για κάθε $t \geq 0$:

$$x = x(t) = \ln(t+2) \quad \text{και} \quad y = y(t) = t^2 + 1.$$

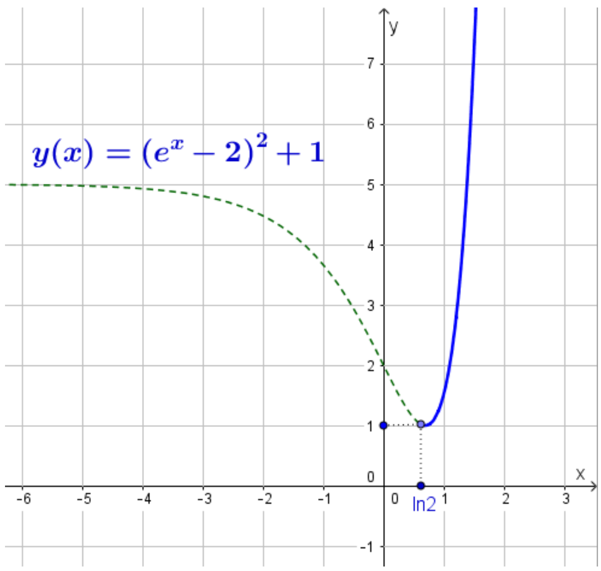
Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς t και αντικαθιστούμε στη δεύτερη, με σκοπό να δημιουργήσουμε μία ισότητα που να συνδέει τις μεταβλητές x και y, χωρίς την παρουσία της μεταβλητής t. Έτσι έχουμε:

$$t + 2 = e^x \Leftrightarrow t = e^x - 2 \quad \text{και} \quad y = (e^x - 2)^2 + 1.$$

Επομένως η συνάρτηση του y ως προς x είναι η:

$$y(x) = (e^x - 2)^2 + 1$$

με $x \in [ln2, +\infty)$, $y \in [1, +\infty)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



γ) <u>α΄ τρόπος</u>: Από τις σχέσεις $x = \ln(t+2)$ και $y = t^2 + 1$ έχουμε:

$$t^2 = y - 1 \overset{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t = \sqrt{y-1}.$$

Επομένως:

$$x = x(y) = \ln\left(\sqrt{y-1} + 2\right).$$

<u>β΄ τρόπος</u>:

Ουσιαστικά ζητείται η αντίστροφη συνάρτηση της $y(x) = (e^x - 2)^2 + 1$.

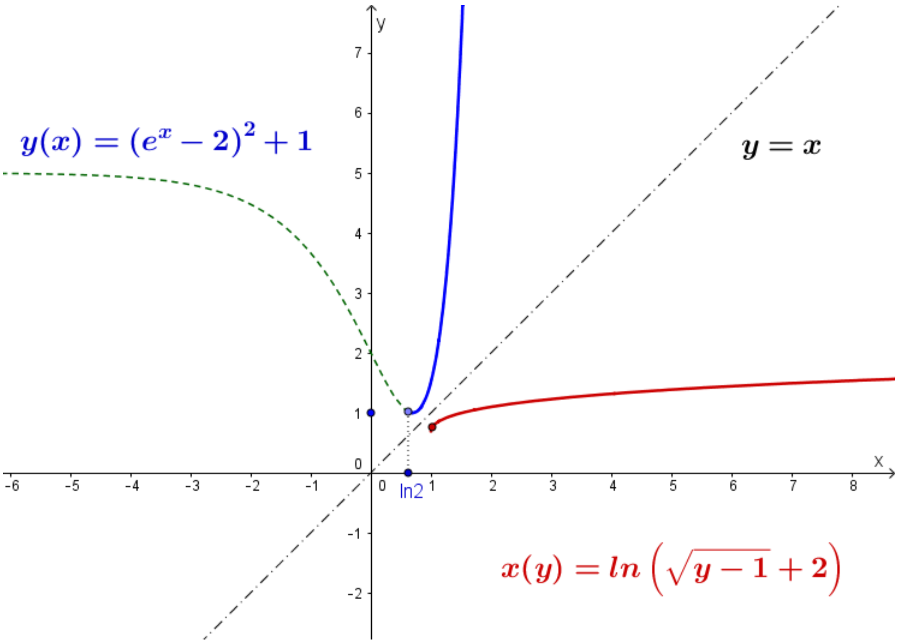
Είναι $y'(x) = 2e^x(e^x - 2) > 0$. Δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και «$1-1$» στο $[ln2, +\infty)$.

Επομένως η y είναι αντιστρέψιμη, με Πεδίο Ορισμού της αντίστροφής της το δικό της Σύνολο Τιμών, δηλαδή το διάστημα $[1, +\infty)$. Επιπλέον έχουμε:

$$y = (e^x - 2)^2 + 1 \Leftrightarrow (e^x - 2)^2 = y - 1 \overset{y \geq 1}{\Longleftrightarrow} e^x - 2 = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow$$

$$e^x = \sqrt{y-1} + 2 \Leftrightarrow x = x(y) = \ln\left(\sqrt{y-1} + 2\right).$$

Στο επόμενο σχήμα φαίνονται και οι δύο συναρτήσεις.



δ) Εδώ μας ζητείται το ακόλουθο πηλίκο:

$$M.O. = \frac{y(2) - y(0)}{x(2) - x(0)} = \frac{5-1}{ln4 - ln2} = \frac{4}{ln2} \approx 5{,}77.$$

ε) Όταν $t = 1$, είναι $x(1) = \ln(1+2) = ln3$.

Ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x, είναι:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=ln3} = y'(ln3) = 2e^{ln3}(e^{ln3} - 2) = 6.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ, ψ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = \varphi(x) + 1 \quad (1)$$

$$\varphi'(x) - x\psi'(x) = \varphi(x) - x$$

και $\varphi(0) = 1, \psi(0) = 0$.

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x+1)\varphi'(x) = (x+1)\,\varphi(x).$$

Β) Να αποδείξετε ότι $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $\psi(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των φ, ψ και τις ευθείες $x = 0$ και $x + y = e + 1$.

<u>Λύση</u>

Α) $\begin{cases}\varphi'(x) + \psi'(x) = \varphi(x) + 1 \\ \varphi(x) - x\psi'(x) = \varphi(x) - x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\varphi'(x) + x\psi'(x) = x\varphi(x) + x \\ \varphi(x) - x\psi'(x) = \varphi(x) - x\end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε, ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x+1)\varphi'(x) = (x+1)\varphi(x).$$

Β) Για $x \neq -1$ προκύπτει ότι $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Οπότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 τέτοιες, ώστε:

$$\varphi(x) = \begin{cases}c_1 e^x, & x < -1 \\ c_2 e^x, & x > -1\end{cases}.$$

Η φ όμως είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, οπότε:

$$\lim_{x\to -1^-}\varphi(x) = \lim_{x\to -1^+}\varphi(x) \Rightarrow c_1 e^{-1} = c_2 e^{-1} \Rightarrow c_1 = c_2.$$

Αλλά είναι $\varphi(0) = 1 = c_2$, οπότε συνεπάγεται ότι $c_1 = c_2 = 1$.

Για $x = -1$ έχουμε ότι $\varphi(-1) = \lim_{x\to -1^-}\varphi(x) = \lim_{x\to -1^+}\varphi(x) = e^{-1}$.

Επομένως είναι $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

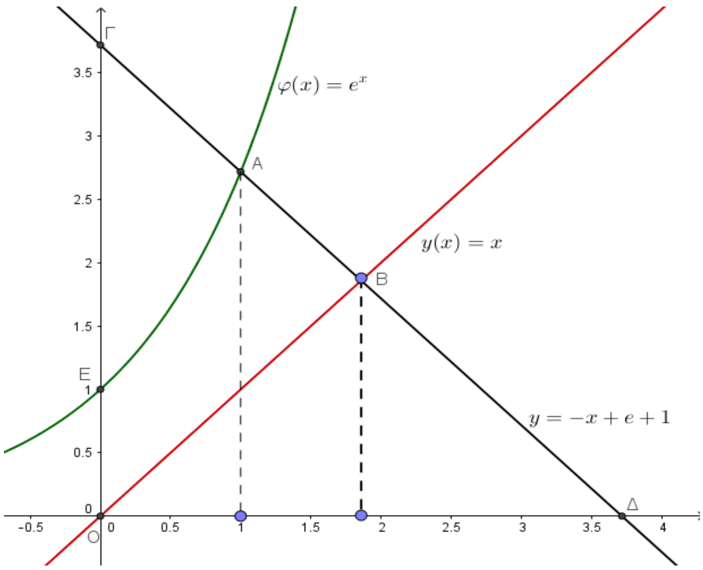
Γ) Είναι $\varphi'(x) = \varphi(x) = e^x$.

Από την (1) έχουμε: $\psi'(x) = 1 \Rightarrow \psi(x) = x + c$.

Αν $x = 0$, τότε $\psi(0) = c \Rightarrow c = 0$.

Άρα $\psi(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

Δ)



Για το σημείο A ισχύει: $e^x = -x + e + 1 \Leftrightarrow e^x + x = e + 1 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x,\ x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = e + 1$, άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση τη $x = 1$.

Για το σημείο B ισχύει: $x = -x + e + 1 \Leftrightarrow 2x = e + 1 \Leftrightarrow x = \frac{e+1}{2}$.

Για το σημείο $Γ$ ισχύει: $y = 0 \Leftrightarrow -x + e + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e + 1$.

1^{ος} τρόπος:

$$E=\int_0^1\big(\varphi(x)-y(x)\big)\,dx+\int_1^{\frac{e+1}{2}}\big(y-y(x)\big)dx=$$

$$\int_0^1(e^x-x)\,dx+\int_1^{\frac{e+1}{2}}(-x+e+1-x)dx=$$

$$\int_0^1(e^x-x)\,dx+\int_1^{\frac{e+1}{2}}(-2x+e+1)dx=$$

$$[e^x]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-[x^2]_1^{\frac{e+1}{2}}+(e+1)[x]_1^{\frac{e+1}{2}}=$$

$$=e-1-\frac{1}{2}-\left(\frac{e+1}{2}\right)^2+1+(e+1)\left(\frac{e+1}{2}-1\right)=$$

$$=e-\frac{1}{2}-\frac{(e+1)^2}{4}+\frac{(e+1)^2}{2}-e-1=\frac{(e+1)^2}{4}-\frac{3}{2}$$

2^{ος} τρόπος:

$$E=(OB\Gamma)-(EA\Gamma)$$

Αν BH είναι το ύψος του τριγώνου $OB\Gamma$, τότε:

$$(OB\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot O\Gamma\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot(e+1)\cdot\frac{e+1}{2}=\frac{(e+1)^2}{4}$$

$$(EA\Gamma)=\int_0^1\big(y-\varphi(x)\big)dx=\int_0^1(-x+e+1-e^x)dx=$$

$$-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+(e+1)[x]_0^1-[e^x]_0^1=-\frac{1}{2}+(e+1)-e+1=\frac{3}{2}$$

Επομένως είναι:

$$E=\frac{(e+1)^2}{4}-\frac{3}{2}\text{ τ.μ.}$$

2. Δίνεται συνάρτηση $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = 2e^{f(x)},\ x \geq 0 \ \text{ με } f(0) = 0 \ \text{ και } f'(0) = -2.$$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β) Να βρείτε τον τύπο της f.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $\int_0^x f(t)dt + 2 = 0$.

<u>Λύση</u>

Α) Έχουμε διαδοχικά:

$$f''(x) = 2e^{f(x)}$$

$$2f'(x) \cdot f''(x) = 2f'(x) \cdot 2e^{f(x)}$$

$$\left(\left(f'(x)\right)^2\right)' = \left(4e^{f(x)}\right)'.$$

Επομένως υπάρχει σταθερά c_1 τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\left(f'(x)\right)^2 = 4e^{f(x)} + c_1 \quad (1)$$

Για $x = 0$ από την (1) προκύπτει ότι: $\left(f'(0)\right)^2 = 4e^{f(0)} + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$.

Άρα $\left(f'(x)\right)^2 = 4e^{f(x)}, x \geq 0$.

Αφού η f' είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο $[0,+\infty)$. Επίσης παρατηρούμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$. Άρα η f' διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Επομένως είναι $f'(x) = 2\sqrt{e^{f(x)}}$ ή $f'(x) = -2\sqrt{e^{f(x)}}$.

Αφού όμως είναι $f'(0) = -2$, τότε θα είναι $f'(x) < 0$ και κατά συνέπεια,

αφενός μεν έχουμε:

$$f'(x) = -2\sqrt{e^{f(x)}}, \quad x \geq 0$$

αφετέρου δε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β) Έχουμε διαδοχικά:

$$f\,'(x) = -2\sqrt{e^{f(x)}}$$

$$f\,'(x) = -2\,e^{\frac{f(x)}{2}}$$

$$-f\,'(x) \cdot e^{-\frac{f(x)}{2}} = 2$$

$$-\frac{1}{2}f\,'(x) \cdot e^{-\frac{f(x)}{2}} = 1$$

$$\left(e^{-\frac{f(x)}{2}}\right)' = (x)'.$$

Επομένως υπάρχει σταθερά c_2 τέτοια ώστε να ισχύει:

$$e^{-\frac{f(x)}{2}} = x + c_2 \qquad (2)$$

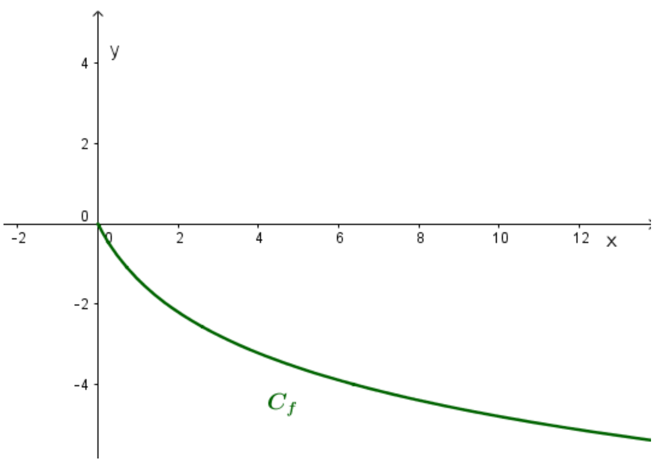
Για $x = 0$ από τη (2) προκύπτει: $c_2 = 1$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$e^{-\frac{f(x)}{2}} = x + 1$$

$$-\frac{f(x)}{2} = \ln(x+1)$$

$$f(x) = -2\ln(x+1)\,, \qquad x \geq 0.$$



Γ) Αρχικά υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x -2\ln(t+1)\,dt = -2\int_0^x (t+1)'\ln(t+1)\,dt =$$

$$-2[(t+1)ln(t+1)]_0^x + 2\int_0^x \frac{t+1}{t+1}dt = -2(x+1)ln(x+1) + 2\int_0^x dt =$$

$$-2(x+1)ln(x+1) + 2[t]_0^x = -2(x+1)ln(x+1) + 2x.$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$-2(x+1)ln(x+1) + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow -2(x+1)ln(x+1) + 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2(x+1)(ln(x+1) - 1) = 0 \ \Leftrightarrow x+1 = 0 \ \text{ή} \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \ \text{ή} \ x+1 = e \overset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$x = e - 1.$$

3. Δίνεται συνάρτηση $g(x) = e^x + x$. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, τέτοια ώστε για κάθε $x \geq 0$ να ισχύει:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{g\big(f(x)\big)}.$$

<u>Λύση</u>

Αφού $g(x) = e^x + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $g\big(f(x)\big) = e^{f(x)} + f(x)$. Έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{g\big(f(x)\big)}$$

$$f'(x) \cdot g\big(f(x)\big) = g(x)$$

$$f'(x)\big(e^{f(x)} + f(x)\big) = e^x + x$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + f(x) \cdot f'(x) = e^x + x$$

$$\big(e^{f(x)}\big)' + \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' = e^x + x$$

$$\left(e^{f(x)}+\frac{f^2(x)}{2}\right)'=\left(e^x+\frac{x^2}{2}\right)'.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=e^x+\frac{x^2}{2}$ με $x\geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=e^x+x>0$ για κάθε $x>0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ και ως εκ τούτου «$1-1$».Τότε έχουμε:

$$\big(h(f(x)\big)'=h'(x),\ \text{για κάθε } x\geq 0.$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $h\big(f(x)\big)=h(x)+c$ για κάθε $x\geq 0$. Αλλά $f(0)=0$, οπότε $h(0)=h(0)+c\Rightarrow c=0$. Άρα έχουμε:

$$h\big(f(x)\big)=h(x)\xRightarrow{h\ "1-1"}f(x)=x \text{ για κάθε } x\geq 0.$$

4. Δίνεται συνάρτηση $g(x)=e^x+x$. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, τέτοια ώστε για κάθε $x\geq 0$ να ισχύει:

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g'\big(f(x)\big)}.$$

Λύση

Καταρχάς η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=e^x+1>0$ για κάθε x. Επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Έχουμε $f'(x)=\frac{g'(x)}{g'(f(x))}\Leftrightarrow g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow\Big(g\big(f(x)\big)\Big)'=g'(x)$.

Επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g\big(f(x)\big)=g(x)+c$.

Αλλά $f(0)=0$, οπότε $g(0)=g(0)+c\Rightarrow c=0$.

Άρα έχουμε $g\big(f(x)\big)=g(x)$ και επειδή η συνάρτηση g είναι «$1-1$», ως γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

5. Έστω συνάρτηση $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (-2, 2), για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει σημεία καμπής.

Β) i) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $x_1,\ x_2 \in (-2, 2)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία με τετμημένες x_1, x_2 να είναι παράλληλες.

ii) Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(0) = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{για κάθε } x \in [-2, 2].$$

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -2$ και $x = 2$.

Λύση

Α) Επειδή η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2, 2)$, συμπεραίνουμε ότι αν έχει σημείο καμπής στο Πεδίο Ορισμού της, αυτό θα βρίσκεται στις ρίζες της δεύτερης παραγώγου. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

Επιπλέον από την σχέση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, προκύπτει:

$$2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0$$

$$f'(x)(f(x) - 1) + x = 0 \quad (1)$$

$$f''(x)(f(x) - 1) + \left(f'(x)\right)^2 + 1 = 0$$

$$f''(x)(f(x) - 1) = -\left[\left(f'(x)\right)^2 + 1\right] \quad (2)$$

Η σχέση (2), για $x = x_0$, γίνεται $\left(f'(x_0)\right)^2 + 1 = 0$ το οποίο είναι αδύνατο.

Επομένως η συνάρτηση δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

B) i) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2,2)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία με τετμημένες x_1, x_2 να είναι παράλληλες. Τότε είναι $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Για την συνάρτηση f' στο $[x_1, x_2]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2,2)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$. Αυτό όμως, όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, είναι άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2,2)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία με τετμημένες x_1, x_2 να είναι παράλληλες.

ii) Από τη σχέση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, έχουμε διαδοχικά:

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 - 1 + x^2 - 3 = 0$$

$$(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2, \quad x \in [-2,2].$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - 1$, τότε έχουμε:

$$h^2(x) = 4 - x^2, \quad x \in [-2,2].$$

- h συνεχής στο $(-2,2)$, (επειδή η f είναι παραγωγίσιμη)
- $h(x) \neq 0$ στο $(-2,2)$, (επειδή $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$)
- $h(0) = f(0) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$

Επομένως η συνάρτηση h διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο $(-2,2)$, το οποίο είναι θετικό. Επιπλέον είναι $h(-2) = h(2)$.

Ως εκ τούτου έχουμε ότι:

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2} \text{ με } h(x) \geq 0,\ x \in [-2,2]$$

και τελικά:

$$f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}, \text{ για κάθε } x \in [-2,2].$$

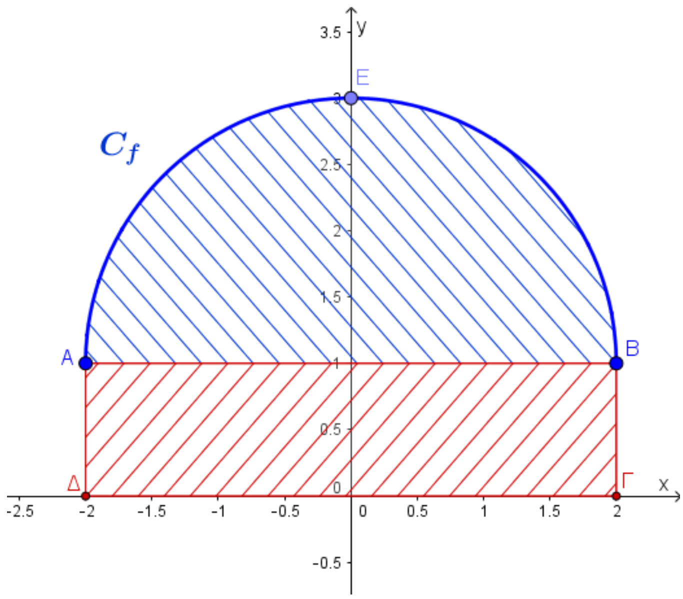
iii) Αφού $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2} > 0$, για κάθε $x \in [-2,2]$, το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει από τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος:

$$\int_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)dx.$$

Επειδή οι τριγωνομετρικές αλλαγές μεταβλητών είναι εκτός ύλης, θα προσεγγίσουμε το ερώτημα γεωμετρικά.

Ως γνωστόν, η εξίσωση $x^2+y^2=4$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$. Επίσης η εξίσωση $y=\sqrt{4-x^2}$ αντιστοιχεί στο ημικύκλιο με τις μη αρνητικές τεταγμένες.

Έτσι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, είναι το προηγούμενο ημικύκλιο ανεβασμένο κατά μία μονάδα επάνω, παράλληλα με τον άξονα $x'x$.



Το χωρίο που δημιουργείται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=-2$ και $x=2$, αποτελείται από το ημικύκλιο AEB ακτίνας $\rho=2$ και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος $AB=2\rho=4$ και πλάτος $B\Gamma=1$.

Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν, είναι:

$$E=(AEB)+(AB\Gamma\Delta)=\frac{\pi\rho^2}{2}+(AB)(B\Gamma)=2\pi+4 \text{ τ.μ.}$$

6. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 1$
- $f'(-x) \cdot f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(0) = 0$.

ii) Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Β) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h, ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$, με $h'(x) = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$ και $h(1) = 0$.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την C_h, τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = h(2017)$.

<u>Λύση</u>

Α) i) Θέτοντας στη σχέση $f'(-x) \cdot f(x) = -x$ όπου $x = 0$, έχουμε:

$$f'(0) \cdot f(0) = 0, \text{ δηλαδή } f'(0) \cdot 1 = 0, \text{ οπότε } f'(0) = 0.$$

ii) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, για $x \neq 0$ είναι $f'(-x) \cdot f(x) = -x \neq 0$ και επομένως $f(x) \neq 0$. Είναι όμως $f(0) = 1 > 0$, οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β) i) Θέτοντας στη σχέση $f'(-x) \cdot f(x) = -x$ όπου x το $-x$, έχουμε:

$$f'(x) f(-x) = x.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$g'(x) = \left(\frac{f(-x)}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(-x)f(x) - f'(x)f(-x)}{f^2(x)} = \frac{-(-x) - x}{f^2(x)} = 0.$$

Επομένως η g είναι σταθερή. Αλλά $g(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$, οπότε έχουμε ότι $g(x) = 1$.

ii) Είναι $\frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$. Έτσι από την σχέση $f'(x)f(-x) = x$ προκύπτει ότι ισχύει $f'(x)f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή είναι διαδοχικά:

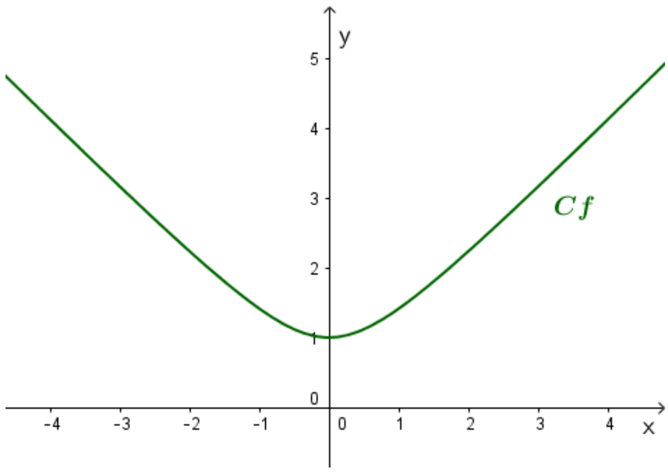
$$f'(x)f(x) = x$$

$$2f'(x)f(x) = 2x$$

$$\left(f^2(x)\right)' = (x^2)'.$$

Επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f^2(x) = x^2 + c$.

Αλλά $f(0) = 1$ οπότε έχουμε $c = 1$ και έτσι είναι $f^2(x) = x^2 + 1$.



Επειδή όμως η f παίρνει μόνο θετικές τιμές και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Γ) i) Αφού $h'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $h(1) = 0$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και ως εκ τούτου ισχύει ότι:

$$0 \leq x \leq 1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(0) \leq h(x) \leq h(1) = 0.$$

Δηλαδή η h παίρνει αρνητικές τιμές για κάθε $x \in [0,1)$ και μηδενίζεται μόνο στο 1.

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

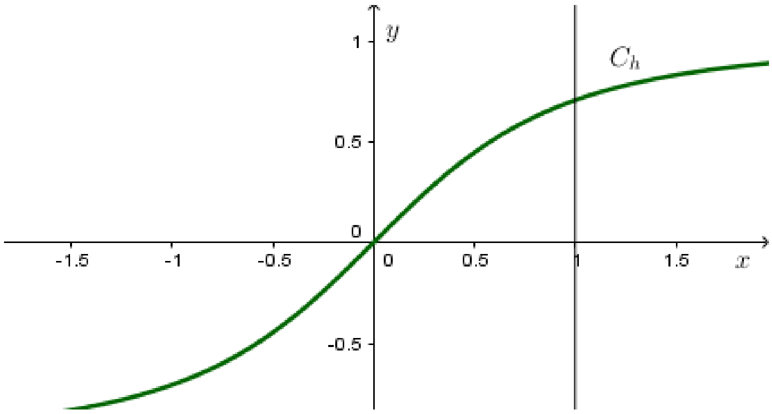
$$E = -\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 (x)' h(x)dx = [-x\, h(x)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot h'(x)dx =$$

$$= [-x\, h(x)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2+1}dx = [-x\, h(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot \sqrt{x^2+1}dx =$$

$$= [-x\, h(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot (x^2+1)^{1/2}dx = [-x\, h(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(x^2+1)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= [-x\, h(x)]_0^1 + \frac{1}{3}\left[(x^2+1)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\ \tau.\mu.$$



ii) Η h είναι «$1-1$» ως γνησίως αύξουσα, επομένως έχουμε:

$$h(x) = h(2017) \Leftrightarrow x = 2017.$$

7. Α. Δίδεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [1, 2], για την οποία ισχύει:

$$\int_1^2 f^2(x)\,dx \le \frac{1}{2} \le \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Α) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης για κάθε $x \in [1,2]$.

Β) Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1,2]$:

i) να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία (ε), η οποία εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης και είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(1,1)$ και $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

ii) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, το οποίο περικλείεται μεταξύ της C_f και της (ε), αν $x \in [1,2]$.

Λύση

Α) Η δοθείσα σχέση είναι ισοδύναμη με τις:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,dx \le \frac{1}{2} \\ \displaystyle\frac{1}{2} \le \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,dx \le \frac{1}{2} \\ \displaystyle\int_1^2 -2\cdot\frac{f(x)}{x}\,dx \le -1 \end{cases}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ανωτέρω, προκύπτει η ανισοτική σχέση:

$$\int_1^2 \left(f^2(x) - 2\cdot\frac{f(x)}{x}\right)dx \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 \left(f^2(x) - 2\cdot\frac{1}{x}\cdot f(x)\right)dx + \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 \left(f^2(x) - 2\cdot\frac{1}{x}\cdot f(x)\right)dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 \left(f^2(x) - 2\cdot\frac{1}{x}\cdot f(x) + \frac{1}{x^2}\right)dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)^2 dx \le 0 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\left(f(x) - \frac{1}{x}\right)^2 \ge 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Επομένως ισχύει ότι:

$$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)^2 dx \ge 0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι:

$$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)^2 dx = 0 \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2]$$

Η παραπάνω ισότητα όμως μπορεί να ισχύει μόνο όταν είναι:

$$\left(f(x) - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2] \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2]$$

B) i) Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει κλίση $\lambda_{AB} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2 - 1} = -\frac{1}{2}$.

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = -\frac{1}{2}.$$

Για την συνάρτηση f, με $f(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in [1, 2]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και επιπλέον είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ και $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Ως εκ τούτου υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{1}{2}.$$

Για τη μοναδικότητα του ξ, μπορούμε να εργασθούμε ως εξής:

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f'(x) + \frac{1}{2}, x \in [1, 2]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}$ έχει μία το πολύ ρίζα. Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{1}{2}$.

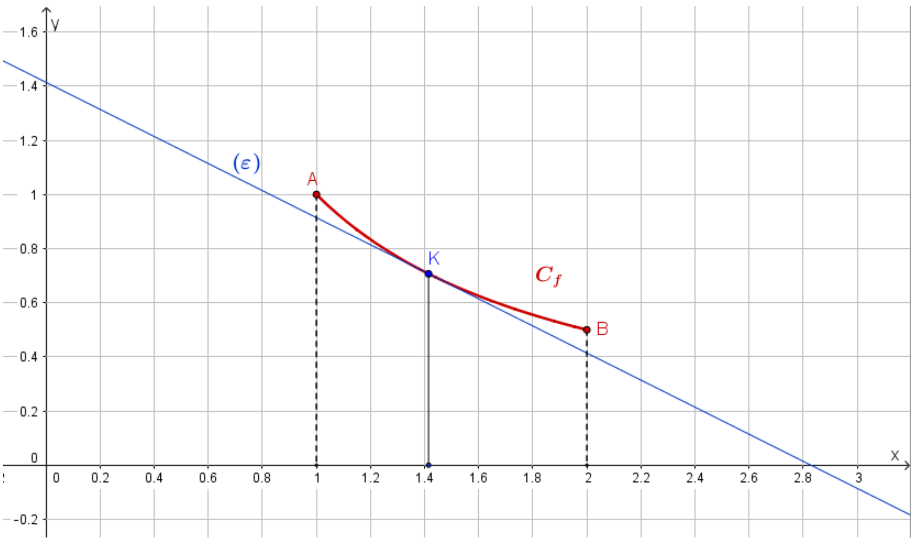
ii) Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε), χρειαζόμαστε το σημείο $K\big(\xi, f(\xi)\big)$. Έτσι επιλύουμε την εξίσωση:

$$f'(\xi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi^2 = 2 \overset{\xi>0}{\Longleftrightarrow} \xi = \sqrt{2}.$$

Άρα έχουμε $K\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι η:

$$(\varepsilon):\ y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}.$$

Επειδή τώρα $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, έπεται ότι η συνάρτηση είναι κυρτή και ως εκ τούτου η εφαπτομένη της (ε) θα βρίσκεται παντού "κάτω" από την C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής K. Τα παραπάνω φαίνονται και στο επόμενο γράφημα.



Το ζητούμενο εμβαδόν λοιπόν, υπολογίζεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$E = \int_1^2 \left| f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{2}\right) \right| dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - \sqrt{2}\right) dx =$$

$$= \left[lnx + \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{2}x \right]_1^2 = ln2 + \frac{3}{4} - \sqrt{2}\ \tau.\mu.$$

8. Δίδεται συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) + 3f(x) - x = 0$ για κάθε $x \geq -\frac{9}{4}$
- $f(x) \geq -\frac{3}{2}$ για κάθε $x \geq -\frac{9}{4}$
- $D_f = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

Α) Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο Πεδίο Ορισμού της.

Β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, του ημιάξονα Ox και της ευθείας $x = 4$.

Γ) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, του ημιάξονα Ox και της ευθείας $x = \alpha$, με $\alpha > 0$, τότε να υπολογίσετε το:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} E(\alpha).$$

<u>Λύση</u>

Α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x) + 3f(x) - x = 0 \quad \text{για κάθε } x \geq -\frac{9}{4}$$

$$f^2(x) + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot f(x) + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - x = 0 \quad \text{για κάθε } x \geq -\frac{9}{4}$$

$$\left(f(x) + \frac{3}{2}\right)^2 = x + \frac{9}{4} \quad \text{για κάθε } x \geq -\frac{9}{4}.$$

Αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) + \frac{3}{2}$,

τότε έχουμε διαδοχικά:

$$h^2(x) = x + \frac{9}{4} \quad \text{για κάθε } x \geq -\frac{9}{4}$$

$$|h(x)| = \sqrt{x + \frac{9}{4}} \quad \text{για κάθε } x \geq -\frac{9}{4}.$$

Επειδή όμως ισχύει ότι $f(x) \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow f(x) + \frac{3}{2} \geq 0$, προκύπτει ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq -\frac{9}{4}$ και έτσι είναι

$$|h(x)| = h(x) \text{ για κάθε } x \geq -\frac{9}{4}.$$

Επομένως $h(x) = \sqrt{x + \frac{9}{4}}$ για κάθε $x \geq -\frac{9}{4}$ και τελικά έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{x + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}, \quad x \in \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right).$$

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο D_f ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Β) Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{9}{4}}} > 0, \quad x \in \left(-\frac{9}{4}, +\infty\right).$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

Επιπλέον είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

Επομένως έχουμε:

$$-\frac{9}{4} \leq x < 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(0) = 0$$

$$x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) = 0.$$

Το δεδομένο χωρίο έχει εμβαδόν που υπολογίζεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$E = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(\sqrt{x + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}\right) dx = \int_0^4 \left(x + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{9}{4}\right)' dx - \frac{3}{2}\int_0^4 dx =$$

$$\left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x\right]_0^4 = \cdots = \frac{13}{6} \text{ τ.μ.}$$

Γ) Καταρχάς το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha}\left(\sqrt{x+\frac{9}{4}}-\frac{3}{2}\right)dx = \cdots = \left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x\right]_0^{\alpha} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\alpha+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\alpha - \frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\alpha+\frac{9}{4}\right)^{3}} - \frac{9}{4}\alpha\right) - \frac{9}{4}.$$

Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\alpha+\frac{9}{4}\right)^{3}} - \frac{9}{4}\alpha\right) - \frac{9}{4}\right) \quad (1)$$

Αλλά ισχύει:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\sqrt{\left(\alpha+\frac{9}{4}\right)^{3}} - \frac{9}{4}\alpha\right) = \lim_{a\to+\infty}\left(\left(a+\frac{9}{4}\right)\cdot\sqrt{a+\frac{9}{4}} - \frac{9}{4}\alpha\right) =$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(a+\frac{9}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{a+\frac{9}{4}} - \frac{\frac{9}{4}\alpha}{a+\frac{9}{4}}\right) = (*) \quad (2)$$

$(*)$ Είναι:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(a+\frac{9}{4}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{a+\frac{9}{4}} = +\infty$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\frac{9}{4}\alpha}{a+\frac{9}{4}} = \frac{9}{4}$$

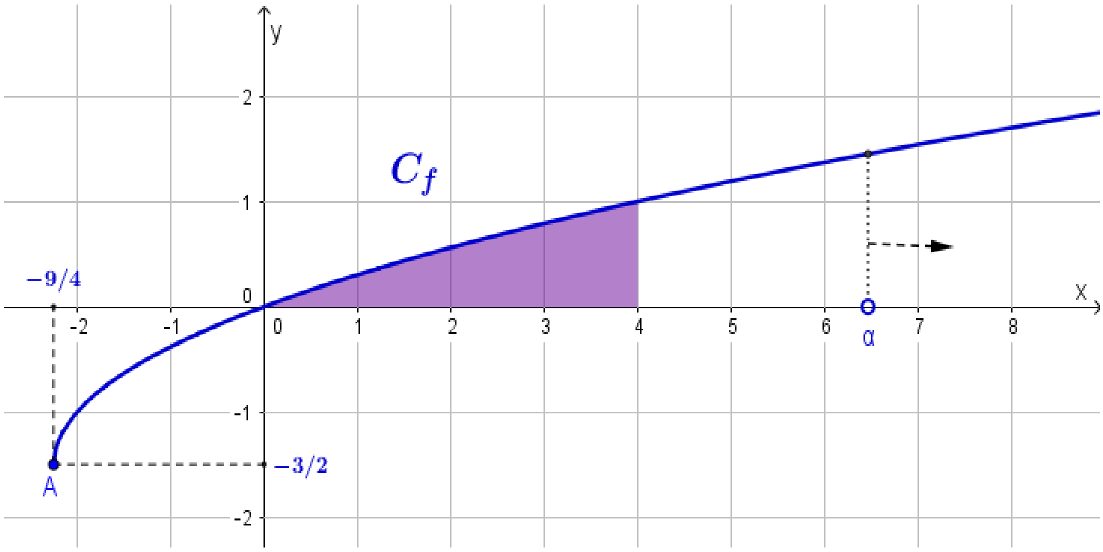
Επομένως από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\lim_{\alpha\to +\infty}\left(\alpha+\frac{9}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{\alpha+\frac{9}{4}}-\frac{\frac{9}{4}\,\alpha}{\alpha+\frac{9}{4}}\right)=+\infty.$$

Από τη σχέση (1) έχουμε τελικά:

$$\lim_{\alpha\to +\infty} E(\alpha)=+\infty.$$

Παρατήρηση. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τα χωρία που δημιουργούνται φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



9. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, έτσι ώστε $f(0)=2017$, $f'(0)=1$ και:

$$\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt+1=\sigma\upsilon\nu^2 x+\int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt \qquad (1)$$

<u>Λύση</u>

Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\int_0^x \big(f'(t)\big)'\,\sigma\upsilon\nu t\,dt-\int_0^x f'(t)\,(-\sigma\upsilon\nu t)'\,dt+1=\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\int_0^x \big(f'(t)\big)'\,\sigma\upsilon\nu t\,dt+\int_0^x f'(t)\,(\sigma\upsilon\nu t)'\,dt+1=\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\int_0^x \left[\left(f'(t)\right)' \sigma\upsilon\nu t + f'(t)\,(\sigma\upsilon\nu t)'\right] dt + 1 = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\int_0^x (f'(t)\sigma\upsilon\nu t)' dt + 1 = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$[f'(t)\sigma\upsilon\nu t]_0^x + 1 = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f'(0)\sigma\upsilon\nu 0 + 1 = \sigma\upsilon\nu^2 x \overset{f'(0)=1}{\Longleftrightarrow}$$

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 x \overset{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $f(x) = \eta\mu x + c$. Επειδή όμως είναι $f(0) = 2017$ έχουμε $c = 2017$ και ως εκ τούτου η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$f(x) = \eta\mu x + 2017 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

10. Η Συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$

Δίδεται η συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο Πεδίο Ορισμού της
- Είναι γνησίως αύξουσα στο Πεδίο Ορισμού της
- $f(1) = 1$
- $f\left(f^2(x)\right) + f^2(x) = f(x) + x$, όταν $x > 0$ (1)

A) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.

B) Αν $f(x) = \sqrt{x},\ \ x \geq 0$, τότε:

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης, καθώς και την παράγωγό της. Τι παρατηρείτε;

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$

Γ) Αν η συνάρτηση f είναι ο περιορισμός στο $[0,+\infty)$ μιας συνάρτησης h η οποία είναι άρτια και ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, τότε να βρεθεί ο τύπος της h και να γίνει η γραφική της παράσταση.

<u>Λύση</u>

Α) Η ιδέα της λύσης βασίζεται στη μετατροπή της σχέσης (1) σε μία απλούστερη χρησιμοποιώντας μία βοηθητική συνάρτηση.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση g, με $g(u)=f(u)+u,\ u>0$. Τότε αν θέσουμε διαδοχικά $u=f^2(x)$ και $u=x$, η σχέση (1) γράφεται:

$$g\big(f^2(x)\big)=g(x) \quad (2)$$

Απαραίτητο είναι όμως να εξετάσουμε αν το $u=f^2(x)$ είναι θετικό, έτσι ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να το θεωρήσουμε σημείο του Πεδίου Ορισμού της συνάρτησης g.

Από τη σχέση (1) βλέπουμε ότι ορίζεται η σύνθεση $f\big(f^2(x)\big)$ όταν $x>0$, επομένως τότε και το $f^2(x)$ οφείλει να είναι θετικό.

Στη συνέχεια για να λύσουμε τη (2) πρέπει να γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση g είναι «1 – 1». Αρκεί βέβαια να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη στο $(0,+\infty)$. Αφού δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και την κατασκευαστική μέθοδο. Είναι λοιπόν:

Έστω τυχαία u_1,u_2 τέτοια ώστε $0<u_1<u_2$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έπεται ότι $f(u_1)<f(u_2)$. Στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες και προκύπτει ότι:

$$f(u_1)+u_1<f(u_2)+u_2 \Rightarrow$$

$$g(u_1)<g(u_2).$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 – 1» στο διάστημα $(0,+\infty)$. Ως εκ τούτου η εξίσωση (2) γράφεται ισοδύναμα

$$f^2(x)=x, \quad x>0 \quad (3)$$

Τελευταίο εμπόδιο αποτελεί η εύρεση του προσήμου της συνάρτησης f.

Από την (3) είναι φανερό ότι:

$$f^2(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Επιπρόσθετα η f είναι συνεχής και $f(1) = 1 > 0$. Έτσι η (3) γίνεται ισοδύναμα:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση που βρήκαμε επαληθεύει την (1).

Τέλος να δούμε τι συμβαίνει στο σημείο $x_0 = 0$ του D_f. Εκεί η συνάρτηση που αναζητούμε είναι συνεχής, επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = f(0).$$

Η συνάρτηση λοιπόν που επιλύει το πρόβλημα είναι η:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Β) Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.

i) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Επίσης:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Δηλαδή, ως γνωστόν, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα, με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$.

ii) Επειδή $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ για κάθε $x > 0$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = [0, +\infty)$. Ως εκ τούτου είναι «1 – 1» και συνεπώς υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2, \quad \text{με } y \geq 0.$$

Επομένως $f^{-1}(y) = y^2$, με $y \geq 0$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x) = x^2, \quad \text{με } x \geq 0.$$

Η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με:

$$(f^{-1})'(x) = 2x, \quad \text{με } x \geq 0.$$

Παρατήρηση. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ (άκρο του διαστήματος που είναι το κοινό Πεδίο Ορισμού των αντιστρόφων συναρτήσεων) με $(f^{-1})'(0) = 0$, όπου δεν ήταν παραγωγίσιμη η f.

Αναφύεται έτσι το εξής ερώτημα. Μπορούμε να έχουμε σχέση μεταξύ των παραγώγων δύο αντιστρόφων συναρτήσεων; Τα επόμενα θεωρήματα απαντούν στο παραπάνω ερώτημα.

Θεώρημα 1: *Αν έχουμε μία συνάρτηση f, ορισμένη σε διάστημα, συνεχή, «1 – 1» και $f'\big(f^{-1}(x_0)\big) = 0$, τότε η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.*

Απόδειξη: *Ισχύει ότι $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$.*

Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε $f'\big(f^{-1}(x_0)\big) \cdot (f^{-1})'(x_0) = 1$.

Άρα έχουμε $0 \cdot (f^{-1})'(x_0) = 1$, *κάτι που* προφανώς *είναι αδύνατον να ισχύει.*

Επομένως η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Θεώρημα 2: *Αν έχουμε μία συνάρτηση f, ορισμένη σε διάστημα, συνεχή, «1 – 1» και επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(x_0)$, με παράγωγο $f'\big(f^{-1}(x_0)\big) \neq 0$, τότε αποδεικνύεται ότι η f^{-1}έχει παράγωγο στο x_0 και ισχύει:*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x_0)\big)}.$$

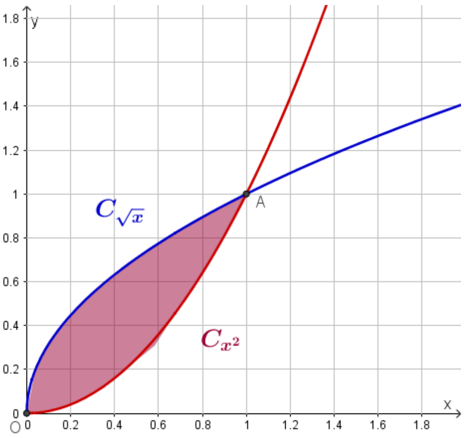
(Η απόδειξη του 2[ου] θεωρήματος μπορεί να αναζητηθεί σε βιβλία Απειροστικού Λογισμού, ξεφεύγει δε από τις επιδιώξεις του παρόντος βιβλίου).

iii) Καταρχάς αναζητούμε τα κοινά σημεία των δύο συναρτήσεων. Είναι

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \overset{x \geq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ \sqrt{x} - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = 1 \\ y = 0 \text{ ή } y = 1 \end{cases}$$

Τα κοινά σημεία είναι τα $O(0,0)$ και $A(1,1)$.

Στη συνέχεια επιλύουμε αλγεβρικά την ανίσωση $\sqrt{x} - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 \left|\sqrt{x} - x^2\right| \, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

Γ) Από τα δεδομένα είναι προφανές ότι για τη ζητούμενη συνάρτηση h, ισχύει ότι $h(x) = f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$. Αναζητούμε λοιπόν τον τύπο της h για $x < 0$.

Υπενθυμίζουμε ότι μία συνάρτηση h είναι άρτια στο $\mathbb{R}$ τότε και μόνο τότε αν:

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ το } -x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ h(-x) = h(x).$$

Αν λοιπόν είναι $x < 0$, τότε $-x > 0$ και έχουμε:

$$h(x) = h(-x) = f(-x) = \sqrt{-x}.$$

Επομένως είναι $h(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, δηλαδή:

$$h(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο:

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1. Θέματα Εξετάσεων

Θέμα Δ – 2001

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 tf^2(xt)dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

δ) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}[xf(x)\eta\mu 2x].$$

<u>Λύση</u>

α) Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι:

$$f(x) = 1 - 2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt \Leftrightarrow f(x) = 1 - 2\int_0^1 xtf^2(xt)xdt \quad (1)$$

Θέτουμε $u = xt$. Τότε $du = xdt$ και όταν:

- $t = 0$, τότε $u = 0$

- $t = 1$, τότε $u = x$

Επομένως, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x) = 1 - 2\int_0^x uf^2(u)du \quad (2)$$

Η συνάρτηση $uf^2(u)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων), οπότε η συνάρτηση $h(x) = 2\int_0^x uf^2(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f'(x) = \left(1 - 2\int_0^x uf^2(u)du\right)' = -2xf^2(x).$$

γ) Από ερώτημα (α) ισχύει ότι $f'(x) = -2xf^2(x)$. Τότε:

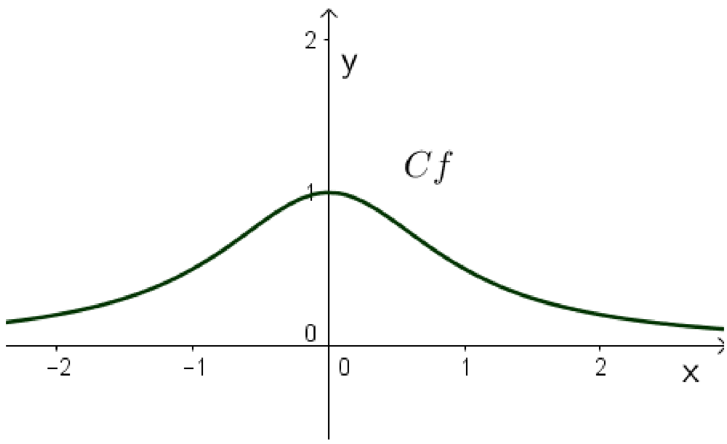
$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = (x^2)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Από τη σχέση (2), για $x = 0$, προκύπτει ότι $f(0) = 1$. Τότε, από τη σχέση (3), για $x = 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Τελικά:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Σχόλια. (α) Το ερώτημα (γ) μπορούσε να απαντηθεί μέσω του ερωτήματος (β) ως εξής:

Από ερώτημα (β) η g είναι σταθερή άρα ισχύει ότι:

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} - x^2 = \frac{1}{f(0)} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} - x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

β) Η εξίσωση:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)dt$$

είναι **ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2^{ου} είδους**.

γ) Η εξίσωση: $f'(x) = -2xf^2(x)$

είναι **συνήθης διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών**.

Θέμα Δ – 2005

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να δειχθεί ότι $f(x) = \ln\frac{1+e^x}{2}$.

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$.

γ) Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt \text{ και } g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}.$$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Δείξτε ότι η εξίσωση για κάθε $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left[e^{f(x)}\right]' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \Leftrightarrow$$

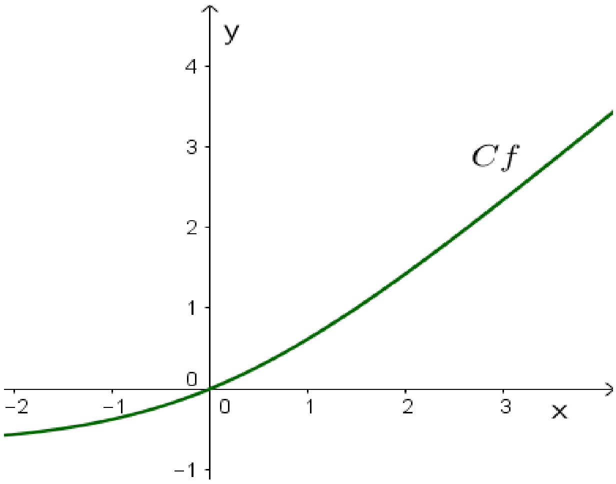
$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Τότε, για $x = 0$ ισχύει ότι:

$$e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow e^0 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Άρα:

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \ln\frac{e^x + 1}{2}.$$



Σχόλιο. Η εξίσωση:

$$2f'(x) = e^{x-f(x)}$$

είναι **συνήθης διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών**.

Θέμα Δ – 2008

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

(β) Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}.$$

(γ) Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$
ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι $1 - 1$.

Λύση. (α) Έστω $I = \int_0^2 f(t)dt$. Τότε, από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι:

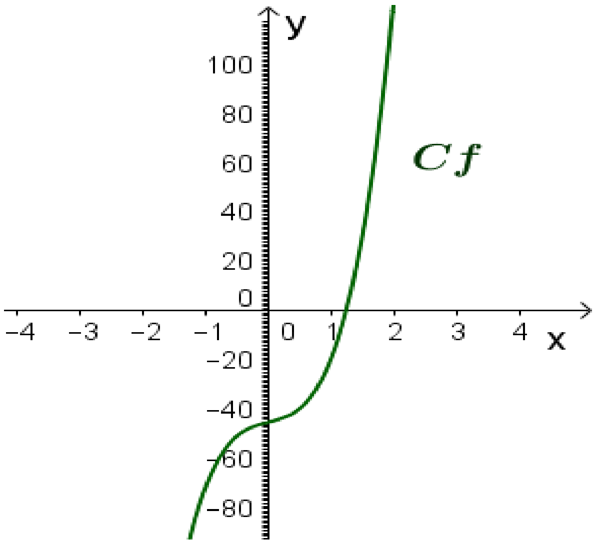
$$I = \int_0^2 f(t)dt \Rightarrow I = \int_0^2 [(10x^3 + 3x)I - 45]dt \Rightarrow$$

$$I = I\int_0^2 (10x^3 + 3x)dt - \int_0^2 45dt \Rightarrow \ I = I\left[\frac{10x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 - [45t]_0^2 \Rightarrow$$

$$I = I\left(\frac{10\cdot 2^4}{4} + \frac{3\cdot 2^2}{2}\right) - 45\cdot 2 \quad \Rightarrow I = 46I - 90 \Rightarrow I = 2.$$

Τότε, από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι:

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\cdot 2 - 45 \Rightarrow f(x) = 20x^3 + 6x - 45.$$



Σχόλιο. Η εξίσωση:

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

είναι **ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm 2ου είδους**.

Θέμα Δ – 2010

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x \text{ και } f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

(γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$.

(δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \quad \text{για κάθε} x \in \mathbb{R}.$$

<u>Λύση</u>

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt \Rightarrow f(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $\varphi(t) = \frac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων), οπότε η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και ισχύει:

$$f'(x) = \left(x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt\right)' \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{f(x)-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+x}.$$

(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f(x) = x \cdot f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$$

$$2f'(x)f(x) = 2x \cdot f'(x) + 2f(x) \Leftrightarrow$$

$$[f^2(x)]' = [2x \cdot f(x)]' \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = 2x \cdot f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από τη σχέση (1), για $x = 0$, προκύπτει ότι $f(0) = 3$. Τότε:

$$f^2(0) = 2 \cdot 0 \cdot f(0) + c \Leftrightarrow c = 3^2 \Leftrightarrow c = 9.$$

Άρα:

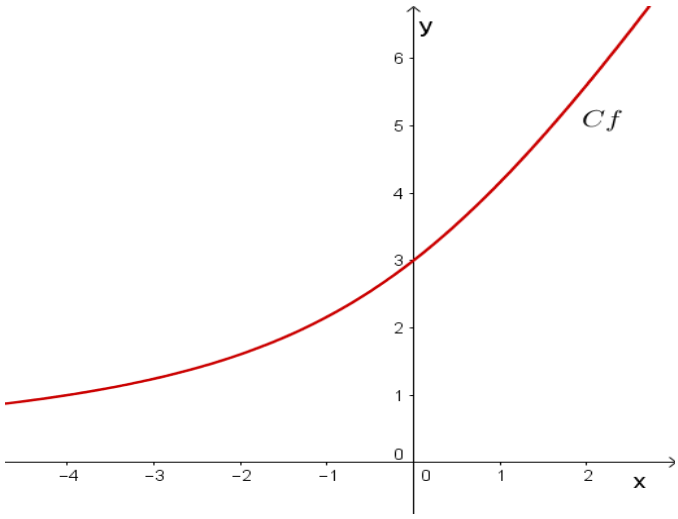
$$f^2(x) = 2x \cdot f(x) + 9 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2 = 9 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$[f(x) - x]^2 = x^2 + 9.$$

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων). Επίσης $x^2 + 9 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η h διατηρεί πρόσημο και αφού $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$, ισχύει ότι $h(x) > 0$. Τότε:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}.$$



Σχόλιο. Η εξίσωση:

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

είναι **ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2^{ου} είδους**.

Θέμα Γ – 2011

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x[f'(x) + f''(x) - 1] = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

(δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Λύση</u>

(α) Από τη δοσμένη σχέση, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι:

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - f'(x) - xf''(x) = e^x \Leftrightarrow [e^x f'(x) - xf'(x)]' = (e^x)'$$

οπότε:

$$e^x f'^{(x)} - xf'^{(x)} = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από τη προηγούμενη σχέση, για $x = 0$, προκύπτει ότι:

$$e^0 f'(0) - 0 \cdot f'(0) = e^0 + c \Leftrightarrow 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

Τότε:

$$e^x f'(x) - x \cdot f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = [\ln(e^x - x)]'$$

οπότε:

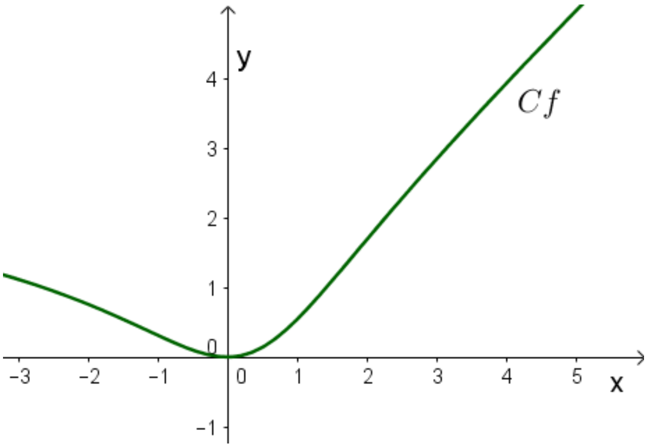
$$f(x) = \ln(e^x - x) + c.$$

Από τη προηγούμενη σχέση, για $x = 0$, προκύπτει ότι:

$$f(0) = \ln(e^0 - 0) + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Τελικά:

$$f(x) = \ln(e^x - x).$$



Θέμα Δ – 2011

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i. $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii. $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

iii. $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$

(α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

<u>Λύση</u>

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \qquad (1)$$

Θέτουμε $u = x + t$. Τότε $du = dt$ και όταν:

- $t = 0$, τότε $u = x$
- $t = -x$, τότε $u = 0$

Επομένως, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$
$$1 - f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du.$$

Ομοίως από τη σχέση iii) προκύπτει ότι :

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad (3)$$

Οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων), οπότε οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Τότε:

$$f'(x) = \left(1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad (4)$$

και:

$$g'(x) = \left(1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du\right)' \Leftrightarrow g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \quad (5)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{g(x)}{f(x)} \Leftrightarrow$$
$$f'(x) \cdot f(x) - g'(x) \cdot g(x) = 0 \overset{g(x) \neq 0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από τις σχέσεις (2) και (3), για $x = 0$, προκύπτει ότι $f(0) = 1$ και $\mathrm{g}(0) = 1$, οπότε για $x = 0$, προκύπτει ότι:

$$\frac{f(0)}{g(0)} = c \Rightarrow c = 1.$$

Τελικά:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

(β) Από το ερώτημα (α) και τη σχέση (4) έχουμε ότι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$2f'(x) \cdot f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$[f^2(x)]' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από την παραπάνω σχέση, για $x = 0$, προκύπτει ότι:

$$f^2(0) = e^{2\cdot 0} + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$$

οπότε:

$$f^2(x) = e^{2x}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $e^{2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπώς $f(x) \neq 0$ στο $\mathbb{R}$. Άρα η f διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$. Επομένως : $f(x) = e^x$.

Σχόλια. (α) Οι εξισώσεις:

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \qquad \text{και} \qquad g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

είναι **ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra 2ου είδους**.

(β) Η εξίσωση:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

είναι **συνήθης διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών**.

Θέμα Δ – 2012

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

(β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$.

(γ) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt\,, \quad x > 0$$

όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

(δ) Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi).$$

<u>Λύση</u>

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}, \quad x \in (0,+\infty).$$

Τότε, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει:

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(1)$$

δηλαδή η h έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$.

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$, έπεται ότι η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ (πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων), με:

$$h'(x) = f(x^2 - x + 1) - \frac{1 - 2x}{e}.$$

Από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$h'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) - \frac{1 - 2}{e} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}.$$

Τώρα, ισχύει ότι:

- η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$
- $f(x) \neq 0$
- $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$

Έπεται ότι η f διατηρεί πρόσημο και μάλιστα ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Τότε:

$$\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot |f(x)| \Leftrightarrow$$

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot f(x).$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = \ln x - x$, $x \in (0, +\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων), με:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}.$$

Ισχύει ότι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Άρα η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$, το $g(1)=-1$. Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$g(x)\leq -1 \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1.$$

Τότε

$$\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e \neq 0,$$

οπότε:

$$f(x)=\frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e}.$$

Η συνάρτηση $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων), οπότε η συνάρτηση $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Τότε:

$$f(x)=\frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e} \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$

οπότε:

$$\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)' = \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)'.$$

Άρα:

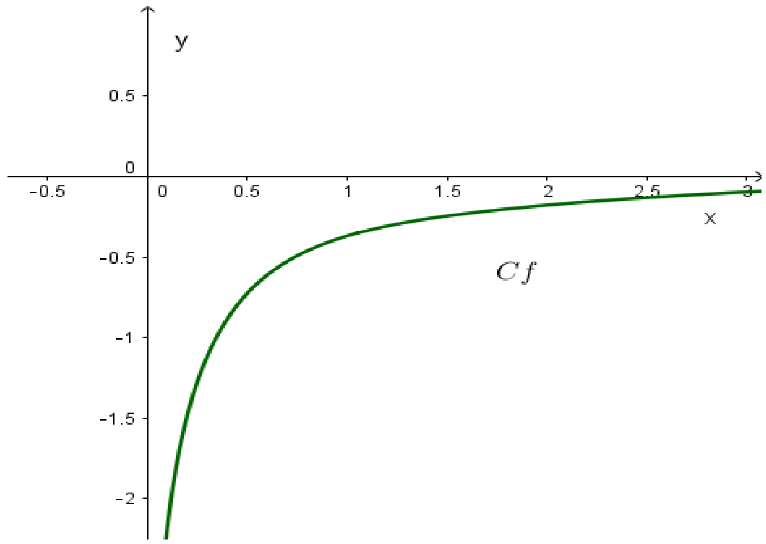
$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = c\cdot e^x \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x - x}{c\cdot e^x}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Από την προηγούμενη σχέση, για $x=1$, προκύπτει ότι:

$$f(1)=\frac{\ln 1 - 1}{c\cdot e^1} \Rightarrow -\frac{1}{e} = -\frac{1}{c\cdot e} \Rightarrow c=1.$$

Τελικά:

$$f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} \cdot (\ln x - x), \quad x > 0.$$



Θέμα Γ – 2013

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες, ώστε:

- $[f(x) + x][f'(x) + 1] = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

(β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f\big(g(x)\big) = 1$.

(γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon\varphi x_0.$$

<u>Λύση</u>

(α) <u>1ος τρόπος:</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) + f(x) + x \cdot f'(x) + x = x \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot f'(x) + f(x) + x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 2f(x) + 2x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f^2(x)]' + [2x \cdot f(x)]' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2x \cdot f(x) = c \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + c \Leftrightarrow [f(x) + x]^2 = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από την προηγούμενη σχέση, για $x = 0$ προκύπτει ότι:

$$[f(0) + 0]^2 = 0^2 + c \Leftrightarrow c = 1.$$

οπότε:

$$[f(x) + x]^2 = x^2 + 1.$$

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$ είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων), με $[h(x)]^2 = x^2 + 1 \neq 0$. Άρα $h(x) \neq 0$ συνεπώς η h διατηρεί πρόσημο και αφού $h(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$, θα είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε:

$$[f(x) + x]^2 = x^2 + 1 \xRightarrow{f(x)+x>0} f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

2ος τρόπος:

Θεωρούμε $h(x) = f(x) + x$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x) + 1$.

Οπότε:

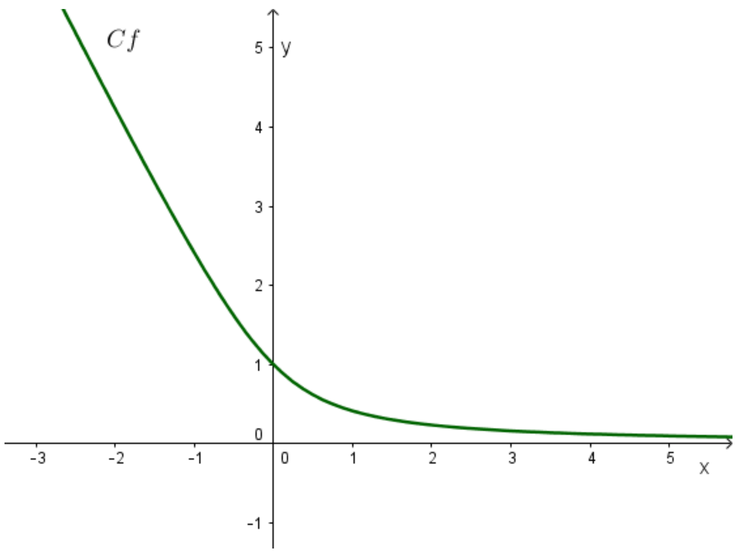
$$h(x)h'(x) = x \Leftrightarrow 2h(x)h'(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$(h^2(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow h^2(x) = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ισχύει ότι $h(0) = f(0) + 0 = 1$ και από την (1) για $x = 0$ προκύπτει ότι $c = 1$.

Άρα $h^2(x) = x^2 + 1$. Επίσης $[h(x)]^2 = x^2 + 1 \neq 0$. Άρα $h(x) \neq 0$, συνεπώς η h διατηρεί πρόσημο και αφού $h(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$, θα είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$



Θέμα Δ – 2015

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(0) = 0$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right) \ln|f(x)|\right].$$

(δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x - 3} - \frac{8 - 2\int_0^x f^2(t)dt}{x - 2} = 0$$

Έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

<u>Λύση</u>

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2 \Leftrightarrow \left[e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right]' = (2x)'$$

άρα:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Από την παραπάνω σχέση, για $x = 0$, προκύπτει ότι:

$$e^{f(0)} - e^{-f(0)} = 2 \cdot 0 + c \Rightarrow e^0 - e^0 = c \Rightarrow c = 0$$

οπότε:

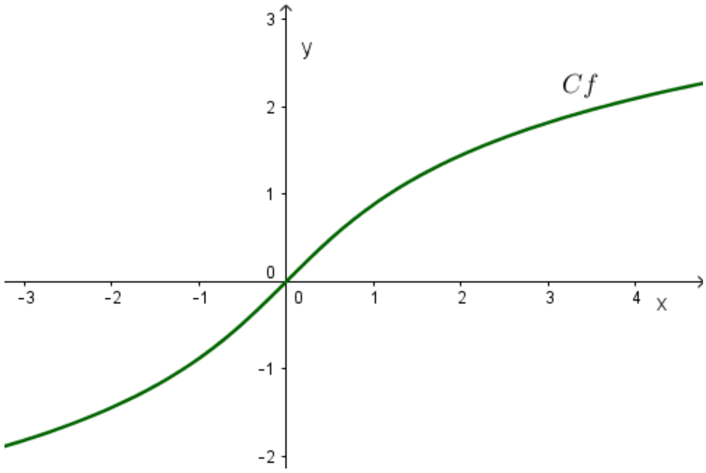
$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 1 = 2x \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 2x \cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left[e^{f(x)} - x\right]^2 = x^2 + 1.$$

Η συνάρτηση $h(x) = e^{f(x)} - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων) και $x^2 + 1 \neq 0$. Συνεπώς $\left(h(x)\right)^2 \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$. Άρα η h διατηρεί πρόσημο και αφού $h(0) = e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$, ισχύει ότι $h(x) > 0$. Οπότε :

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ αφού $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Θέμα Γ – 2016

(α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(γ) Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

(δ) Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος (γ), να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$$

όταν $x \in [0, +\infty)$.

<u>Λύση</u>

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right|.$$

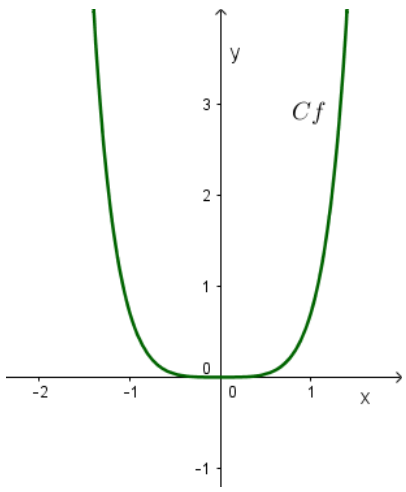
Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και από ερώτημα (α) ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$, η f διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Άρα:

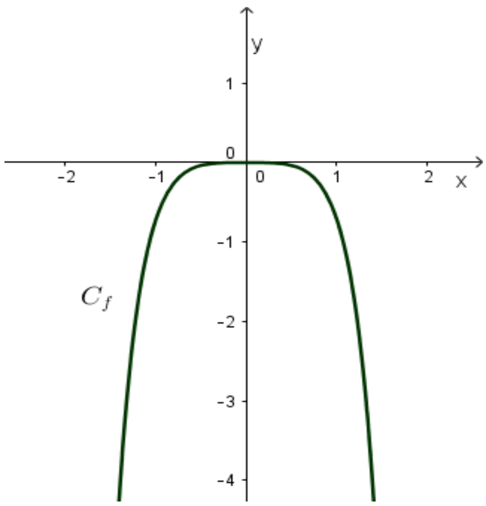
- αν $x < 0$ και $f(x) < 0$, τότε $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$
- αν $x < 0$ και $f(x) > 0$, τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- αν $x > 0$ και $f(x) < 0$, τότε $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$
- αν $x > 0$ και $f(x) > 0$, τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

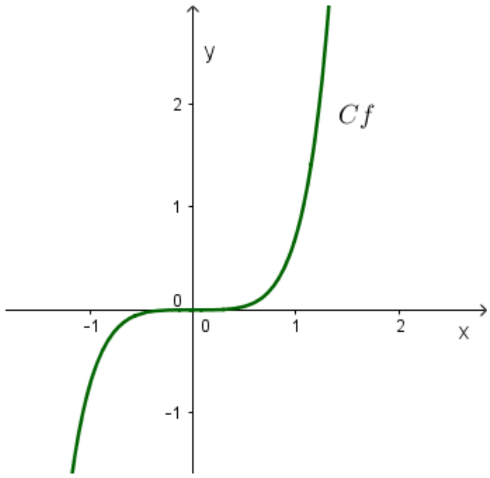
Από τα παραπάνω έπεται ότι:

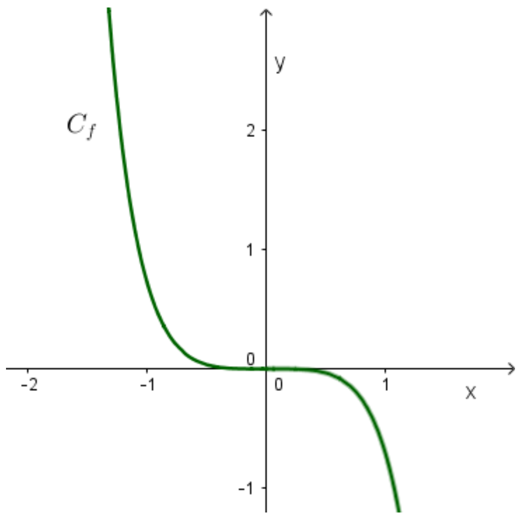
$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1 & x < 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$


y
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
x
Cf


y
1
0
-2
-1
0
1
2
x
-1
-2
-3
-4
C_f


y
2
1
0
-1
-1
0
1
2
x
Cf


y
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
x
C_f

2. Θέματα Επαναληπτικών Εξετάσεων

ΘΕΜΑ Δ – 2001

Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2} dt \text{ με } x > 0.$$

(α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

(β) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1+lnx}{x}, x > 0$.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

(ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

<u>Λύση</u>

(β) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt \overset{x>0}{\Longrightarrow} x^2 f(x) = x + \int_1^x tf(t)dt \quad (1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων.

Παραγωγίζουμε την (1) κατά μέλη και έχουμε:

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 + xf(x) \Rightarrow$$

$$xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow}$$

$$f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} \overset{x>0}{\Longrightarrow}$$

$$\big(xf(x)\big)' = (lnx)' \Rightarrow$$

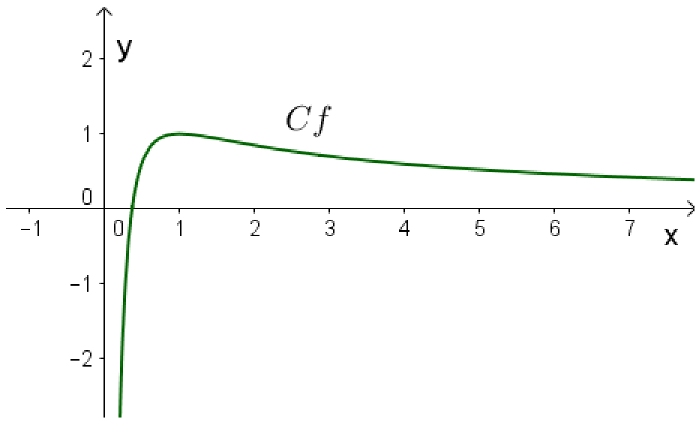
$$xf(x) = lnx + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Από την (1) για $x = 1$ προκύπτει: $f(1) = 1$.

Οπότε από τη (2) για $x = 1$ προκύπτει $c = 1$ και έτσι η (2) γίνεται:

$$xf(x) = lnx + 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} f(x) = \frac{lnx + 1}{x}.$$

Σχόλιο. Η παραπάνω εξίσωση είναι **ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2^{ου} είδους**.



ΘΕΜΑ Δ – 2002

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2f'(0) = 1.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

(β) Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα

$[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1 + f^2(t)} dt = 1$$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα $[0,1]$.

<u>Λύση</u>

(α) $f''(x)f(x) + \left(f'(x)\right)^2 = f(x)f'(x) \Rightarrow \left(f'(x)f(x)\right)' = f(x)f'(x) \quad (1)$

Θεωρούμε $\varphi(x) = f(x)f'(x)$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Από την (1) προκύπτει ότι:

$$\left(\varphi(x)\right)' = \varphi(x) \text{ οπότε } \varphi(x) = c_1 e^x.$$

Από την (1) για $x = 0$ είναι $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ οπότε $c_1 = \frac{1}{2}$.

Άρα:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow f'(x)f(x) = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow$$

$$2f'(x)f(x) = e^x \Rightarrow$$

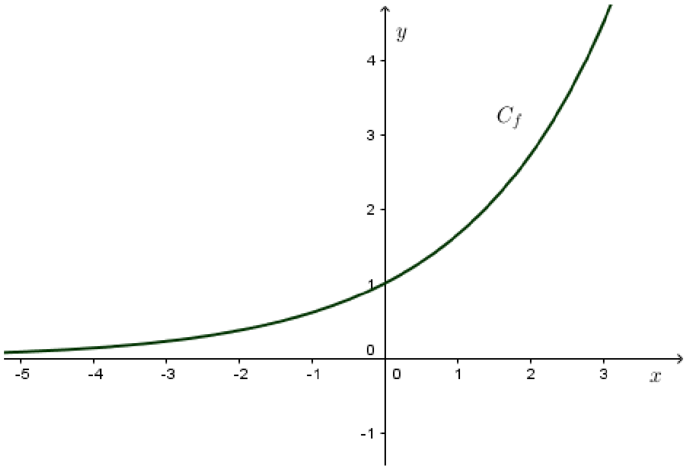
$$(f^2(x))' = (e^x)' \Rightarrow$$

$$f^2(x) = e^x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ έχουμε $f^2(0) = e^0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$. Οπότε $f^2(x) = e^x$.

Αφού $f'(x)f(x) = \frac{1}{2}e^x$ θα είναι $f(x) \neq 0$ οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$.

Επομένως $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$.



ΘΕΜΑ Δ – 2004

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x+1)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$.

(δ) Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

<u>Λύση</u>

(β) Θέτουμε $u = 2xt$, τότε $t = \frac{u}{2x}$ και $dt = \frac{1}{2x}du$.

Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = \frac{1}{2}$ είναι $u = x$. Οπότε:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt = \int_0^x 2xf(u)\frac{1}{2x}du = \int_0^x f(u)du.$$

Επομένως:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x f(u)du \qquad (1)$$

Παραγωγίζουμε την (1) κατά μέλη και έχουμε:

$$f'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = e^{-x}x \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{-x}f(x)\right)' = e^{-x}x \qquad (2)$$

$$\int e^{-x}xdx = -\int (e^{-x})'xdx = -e^{-x}x + \int e^{-x}dx = -e^{-x}x - e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

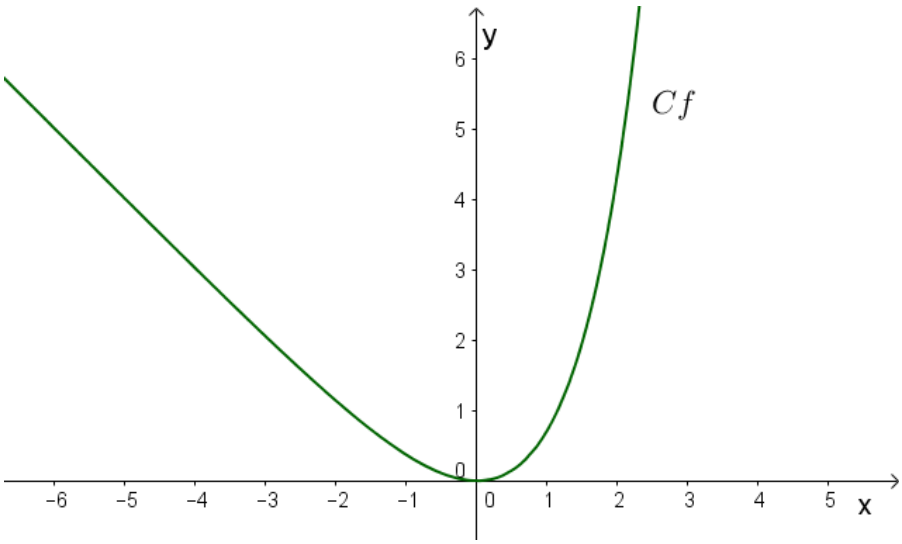
Οπότε από τη (2) προκύπτει:

$$e^{-x}f(x) = -e^{-x}x - e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = -x - 1 + ce^{x} \quad (3)$$

Από την (1) για $x = 1$ προκύπτει: $f(0) = 0$ και από την (3): $c = 1$.

Οπότε από την (3) έχουμε: $f(x) = -x - 1 + e^{x}$.

Σχόλιο. Η εξίσωση (1) είναι **ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2^{ου} είδους**.



ΘΕΜΑ Δ – 2009

Δίνεται μία συνάρτηση $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}, \quad 0 \le x \le 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$, $0 \le x \le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0,2].

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi).$$

(γ) Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

(δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \le x \le 2$.

(ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

<u>Λύση</u>

(δ) <u>1ος τρόπος:</u>

$$g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 = e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) \Rightarrow$$

$$(x^3)' = (e^{-2x} f(x))' \Rightarrow x^3 = e^{-2x} f(x) + c \quad c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Από την (1) για $x = 1$ προκύπτει: $1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$.

Άρα:

$$x^3 = e^{-2x} f(x) \Rightarrow f(x) = x^3 e^{2x}.$$

<u>2ος τρόπος</u>: (χωρίς να λάβουμε υπόψη το ερώτημα (γ))

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 6xe^{2x} \Rightarrow$$

$$e^{-2x} f''(x) - 4e^{-2x} f'(x) + 4e^{-2x} f(x) = 6x \Rightarrow$$

$$e^{-2x} f''(x) - 2e^{-2x} f'(x) - \left(2e^{-2x} f'(x) - 4e^{-2x} f(x)\right) = 6x \Rightarrow$$

$$\left(e^{-2x} f'(x)\right)' - \left(2e^{-2x} f(x)\right)' = (3x^2)' \Rightarrow$$

$$e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 3x^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Από την (1) για $x = 0$ προκύπτει: $f'(0) - 2f(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$.

Άρα:

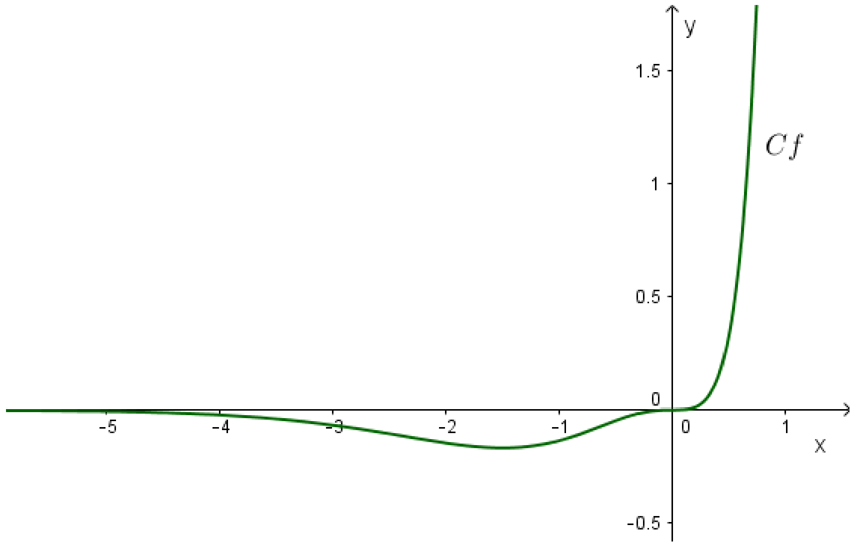
$$e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = 3x^2 \Rightarrow$$

$$\left(e^{-2x}f(x)\right)' = (x^3)' \Rightarrow$$

$$e^{-2x}f(x) = x^3 + c_2 \quad c_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Από τη (2) για $x = 1$ προκύπτει: $e^{-2}f(1) = 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$ οπότε:

$$e^{-2x}f(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = e^{2x}x^3.$$



ΘΕΜΑ Δ – 2010

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με

$f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$.

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

(γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(δ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt,\ x \geq 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση:

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0.$$

<u>Λύση</u>

(α) <u>1ος τρόπος:</u>

$$\begin{aligned}(f'(x) + 2x) - 2x \cdot (f(x) + x^2) = 0 &\Rightarrow (f(x) + x^2)' - (x^2)' \cdot (f(x) + x^2) = 0\\ &\Rightarrow e^{-x^2}(f(x) + x^2)' - e^{-x^2}(x^2)'(f(x) + x^2) = 0\\ &\Rightarrow (e^{-x^2}(f(x) + x^2))' = 0 \Rightarrow e^{-x^2}(f(x) + x^2) = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1)\end{aligned}$$

Από την (1) για $x = 0$ προκύπτει: $f(0) = c \Rightarrow c = 1$

Οπότε: $e^{-x^2}(f(x) + x^2) = 1 \Rightarrow f(x) + x^2 = e^{x^2} \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2$

<u>2ος τρόπος:</u>

Είναι $f(x) + x^2 > 0$, οπότε:

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x) + 2x}{f(x) + x^2} = 2x \Rightarrow \frac{(f(x) + x^2)'}{f(x) + x^2} = (x^2)' \Rightarrow$$

$$(\ln(f(x) + x^2))' = (x^2)' \Rightarrow$$

$$\ln(f(x) + x^2) = x^2 + c \qquad (1)$$

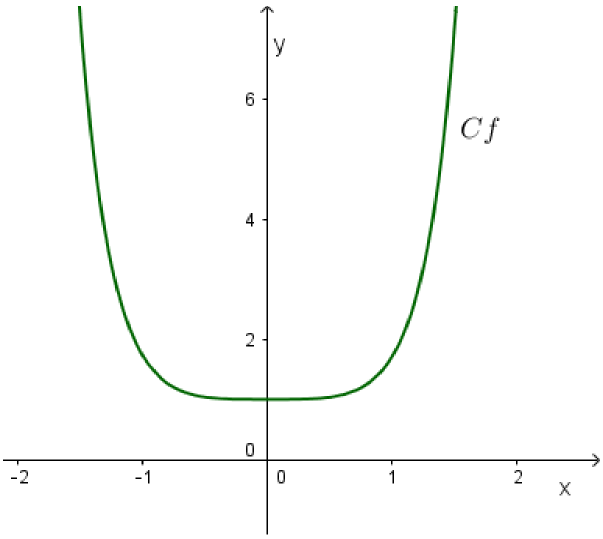
Από την (1) για $x = 0$ προκύπτει ότι:

$\ln(f(0)) = c \Rightarrow c = 1.$

Οπότε:

$$\ln(f(x) + x^2) = x^2 \Rightarrow f(x) + x^2 = e^{x^2} \Rightarrow$$

$$f(x) = e^{x^2} - x^2.$$



ΘΕΜΑ Δ – 2012

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ με $A = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $f(A) = (-\infty, 0]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, και
- $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t)\left(t + \frac{1}{t}\right)dt + 2$, για κάθε $x > 0$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x > 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, $x > 0$.

(β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma\big(x_0,\ F(x_0)\big)$, $x_0 > 0$, το οποίο και να βρείτε.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία:

$$\varepsilon\colon F(\beta)x - (\beta - 1)y + 2012(\beta - 1) = 0.$$

(γ) Αν $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]x^5}{x-1} + \frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3).

(δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \ \le\ \int_1^x tf(t)dt, \text{ για κάθε } x > 0.$$

<u>Λύση</u>

(α) <u>1ος τρόπος</u>:

Οι $e^{f(x)}$ και $x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες. Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη δοσμένη σχέση και προκύπτει:

$$\left(2f(x) + e^{f(x)}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)' = \left(\int_1^x e^{f(t)} f'(t)\left(t + \frac{1}{t}\right)dt + 2\right)'$$

$$\Rightarrow 2f'(x) + f'(x)e^{f(x)}\left(x+\frac{1}{x}\right) + e^{f(x)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = e^{f(x)}f'(x)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\ 2f'(x) +\ e^{f(x)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0\ \Rightarrow\ 2e^{-f(x)}f'(x) + \left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(-2e^{-f(x)}\right)' + \left(x+\frac{1}{x}\right)' = 0\ \Rightarrow -2\,e^{-f(x)} +\ x+\frac{1}{x} = c \quad (1)$$

Από τη δοσμένη σχέση για $x = 1$ προκύπτει ότι: $f(1) + e^{f(1)} = 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = x + e^x,\ \ x \in \mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x) = 1 + e^x > 0$. Άρα g είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης $g(0) = 1$.

Οπότε $g(f(1)) = f(1) + e^{f(1)} \Rightarrow g\big(f(1)\big) = 1 \Rightarrow g\big(f(1)\big) = g(0)$ και αφού η g είναι $1-1$ θα είναι $f(1) = 0$.

Από την (1) για $x = 1$ προκύπτει $c = 0$. Επομένως:

$$-2e^{-f(x)} + x + \frac{1}{x} = 0\ \Rightarrow\ 2e^{-f(x)} = \frac{x^2+1}{x}\ \Rightarrow\ e^{-f(x)} = \frac{x^2+1}{2x}\ \Rightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} \overset{x>0}{\Longrightarrow} f(x) =\ \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

<u>2^{ος} τρόπος:</u>

$$\int_1^x e^{f(t)}\,f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt = \int_1^x \left(e^{f(t)}\right)'\left(t+\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$\left[e^{f(t)}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]_1^x - \int_1^x e^{f(t)}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$e^{f(x)}\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2e^{f(1)} - \int_1^x e^{f(t)}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$2f(x) + \left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = e^{f(x)}\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2e^{f(1)} - \int_1^x e^{f(t)}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt + 2\ \Rightarrow$$

$$2f(x) = -2e^{f(1)} - \int_1^x e^{f(t)}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt + 2 \quad (2)$$

Παραγωγίζουμε τη (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$2f'(x) = \ -e^{f(x)}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$$

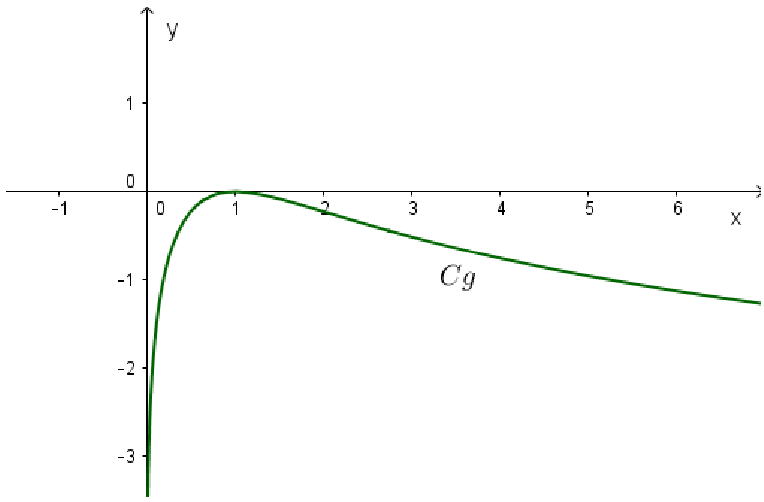
$$-2f'(x)e^{-f(x)} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\left(2e^{-f(x)}\right)' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' \Rightarrow$$

$$2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 1$ προκύπτει $c = 0$.

Οπότε $2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x}$ και εύκολα προκύπτει $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$.



Σχόλιο. Η εξίσωση (2) είναι **ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2ου είδους.**

ΘΕΜΑ Γ – 2013

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος (α).

(γ) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2+1)^3 - 8) \leq f(8(x^2+1)^2.$$

(δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi(3\xi^2-1)f(\xi^3-\xi).$$

<u>Λύση</u>

(α)

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \Rightarrow$$

$$2xf(x) + x^2 f'(x) + f'(x) = 3x^2 \Rightarrow$$

$$(x^2+1)'f(x) + (x^2+1)f'(x) = 3x^2 \Rightarrow$$

$$\left((x^2+1)f(x)\right)' = (x^3)' \Rightarrow$$

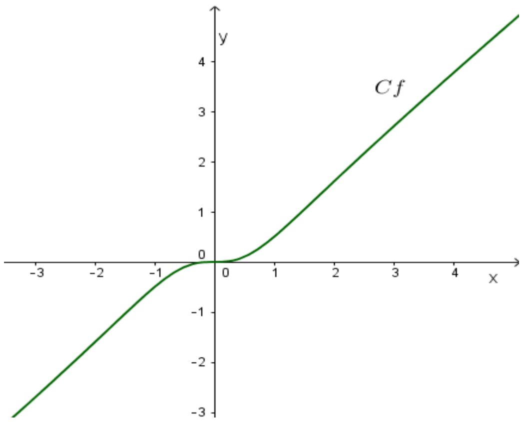
$$(x^2+1)f(x) = x^3 + c \quad (1)$$

Από την (1) για $x = 1$ προκύπτει:

$2f(1) = 1 + c \Rightarrow c = 0.$

Οπότε από την (1) έχουμε:

$$f(x)(x^2+1) = x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$



ΘΕΜΑ Δ – 2015

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{lnx}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

(β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^x f(t)dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(t)}{t}dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

(γ) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)}{t}dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

είναι κοίλη.

ii. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$E < 2.$$

(δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt \geq \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^x tf(t)dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

<u>Λύση</u>

(α)

$$(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} (x-1) \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$(x-1) \cdot f'(x) + (x-1)' \cdot f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \big((x-1) \cdot f(x)\big)' = (lnx)' \Rightarrow$$

$$(x-1) \cdot f(x) = lnx + c \quad c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Από την (1) για $x = 1$ προκύπτει ότι: $c = 0$.

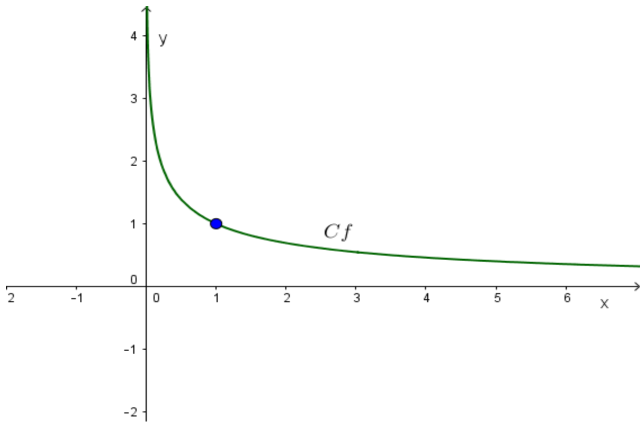
Οπότε για $x \neq 1$ η (1) γίνεται:

$$f(x) = \frac{lnx}{x-1}.$$

Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Επομένως:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(lnx)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Τελικά $f(x) = \begin{cases} \frac{lnx}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α:

Ορθογώνιες Τροχιές

Ορισμός 1.

Γωνία δύο τεμνόμενων καμπυλών στο επίπεδο, ονομάζεται η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενές τους στο σημείο τομής τους.

Ορισμός 2.

Έστω F και G δύο οικογένειες καμπυλών στο επίπεδο. Αν κάθε καμπύλη της G είναι κάθετη με κάθε καμπύλη της F, λέμε ότι η G είναι οι **ορθογώνιες τροχιές** της F.

Πρόβλημα. Θεωρούμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών στο επίπεδο:

$$F(x, y, c) = 0, \ c\text{: παράμετρος} \quad (1)$$

Ζητείται να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των καμπυλών της (1). Δηλαδή, μια οικογένεια καμπυλών:

$$G(x, y, k) = 0 \quad (2)$$

τέτοια, ώστε κάθε καμπύλη της οικογένειας (2) να τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη της οικογένειας (1).

Λύση

Για να λύσουμε το πρόβλημα εργαζόμαστε ως εξής:

1^{o} Βήμα: Βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις καμπύλες της οικογένειας (1). Για να το επιτύχουμε αυτό, παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και απαλείφουμε την παράμετρο c μεταξύ της (1) και της εξίσωσης που προκύπτει από την παραγώγιση. Τότε, καταλήγουμε σε μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

2^{o} Βήμα: Βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις ορθογώνιες τροχιές των καμπυλών της (1). Σε κάθε σημείο τομής (x, y) των καμπυλών της οικογένειας F με τις καμπύλες της οικογένειας G, η εξίσωση (3) δίνει την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης F. Τότε, από τον τύπο $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης G είναι:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} \quad (4)$$

3 —

3^o Βήμα: Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (1) είναι οι ορθογώνιες τροχιές της (1).

Εφαρμογή 1. Να βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών:

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (5)$$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση (5) περιγράφει τους κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = c$. Παραγωγίζοντας την (5) ως προς x έχουμε:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y \cdot \frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της (5) είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c_1 \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|k|$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|kx| \Leftrightarrow |y| = |kx| \Leftrightarrow y = \pm kx.$$

Δηλαδή, οι ορθογώνιες τροχιές της (5), είναι οι ευθείες:

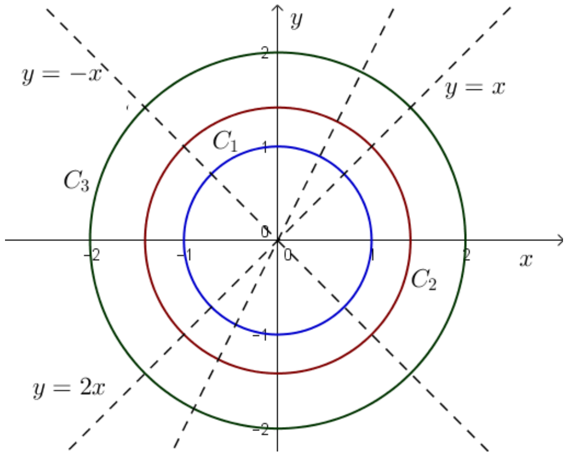
$$y = \lambda x \quad (6)$$

που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

$C_1: x^2 + y^2 = 1$

$C_2: x^2 + y^2 = 2$

$C_3: x^2 + y^2 = 4$



Εφαρμογή 2. Να βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών:

$$y = cx^2 \quad (7)$$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση (7) περιγράφει τις παραβολές με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Παραγωγίζοντας την (7) ως προς x έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = 2cx \xRightarrow{c=y/x^2} \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x^2}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}.$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της (7) είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \Leftrightarrow 2ydy = -xdx \Leftrightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + k \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + y^2 = k.$$

Δηλαδή, οι ορθογώνιες τροχιές της (7) είναι οι ελλείψεις:

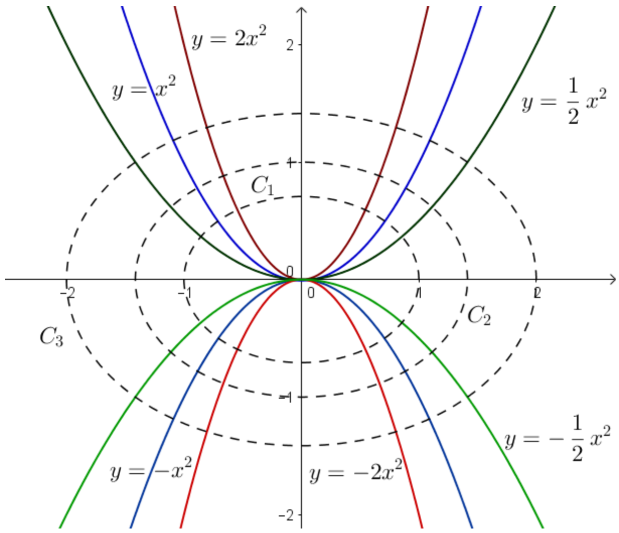
$$\frac{x^2}{2k} + \frac{y^2}{k} = 1 \quad (8)$$

με κέντρο την αρχή των αξόνων.

$C_1: x^2 + 2y^2 = 1$

$C_2: x^2 + 2y^2 = 2$

$C_3: x^2 + 2y^2 = 4$



Εφαρμογή 3. Να βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών:

$$y = \frac{c}{x} \quad (9)$$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση (9) περιγράφει τις υπερβολές με ασύμπτωτες τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Παραγωγίζοντας την (9) ως προς x έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2} \overset{c=xy}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της (9) είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow ydy = xdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k.$$

Δηλαδή, οι ορθογώνιες τροχιές της (9) είναι οι υπερβολές:

$$\frac{y^2}{2k} - \frac{x^2}{2k} = 1 \quad (10)$$

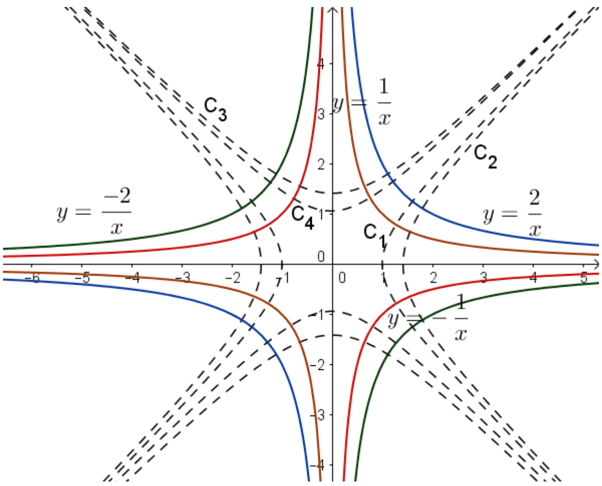
με ασύμπτωτες τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.

$C_1: x^2 - y^2 = 1$

$C_2: x^2 - y^2 = 2$

$C_3: y^2 - x^2 = 2$

$C_4: y^2 - x^2 = 1$



Εφαρμογή 4. Να βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών:

$$y = ce^x \quad (11)$$

<u>Λύση</u>

Παραγωγίζοντας την (11) ως προς x έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = ce^x \overset{y=ce^x}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = y.$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της (11) είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

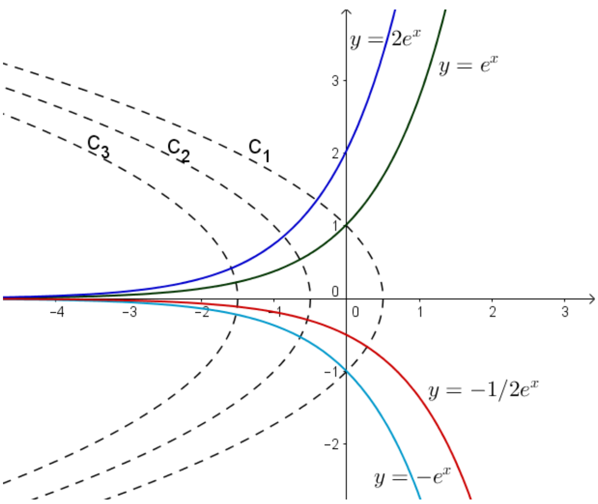
Έχουμε: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \Leftrightarrow ydy = -dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -x + c_1 \Leftrightarrow y^2 = -2x + 2c_1.$

Δηλαδή, οι ορθογώνιες τροχιές της (11) είναι οι παραβολές: $y^2 = -2x + k \quad (12)$

$C_1: y^2 = -2x + 1$

$C_2: y^2 = -2x - 1$

$C_3: y^2 = -2x - 3$



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β:

Θεωρία Ομάδων

Οι επόμενοι ορισμοί και προτάσεις δίδονται για να γίνει σαφές ότι δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο οι πραγματικοί αριθμοί, οι συναρτήσεις και τα πολυώνυμα.

Ορισμός 1.

Ένας **δακτύλιος** $(R, +, \cdot)$ είναι ένα μη κενό σύνολο R εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις "$+$" και "$\cdot$" οι οποίες καλούνται πρόσθεση και πολλαπλασιασμός αντίστοιχα, έτσι ώστε:

(i) το ζεύγος $(R, +)$ να είναι **αβελιανή ομάδα** (δηλαδή ισχύουν η προσεταιριστική και η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης, υπάρχει ουδέτερο στοιχείο το μηδέν και το $-x$ είναι το αντίθετο στοιχείο του x).

(ii) το ζεύγος $(R, \cdot)$ να είναι **ημιομάδα** (δηλαδή ισχύει η προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού).

(iii) η πράξη "$\cdot$" να είναι επιμεριστική ως προς την πράξη "$+$".

Αν επιπλέον υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο, ονομάζεται δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Αν επιπλέον η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι μεταθετική, ονομάζεται μεταθετικός δακτύλιος.

Ορισμός 2.

Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Ένα στοιχείο $\alpha \in R$ με $\alpha \neq 0$ ονομάζεται διαιρέτης του μηδενός **(μηδενοδιαιρέτης)** αν υπάρχει ένα $b \in R$ με $b \neq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $a \cdot b = 0$.

Ένας μεταθετικός δακτύλιος δεν έχει μηδενοδιαιρέτες αν και μόνο αν για κάθε a, $b \in R$ και $c \in R^*$ ισχύει: $c \cdot a = c \cdot b$ ή $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$ (νόμος της διαγραφής).

<u>Ορισμός 3</u>.

Ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο $1 \neq 0$, καλείται **ακέραια περιοχή**, αν δεν έχει μηδενοδιαιρέτες.

<u>Ορισμός 4</u>.

Ένας μη τετριμμένος δακτύλιος καλείται **σώμα *F***, αν το ζεύγος $(F, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Παρατήρηση. Κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή, διότι αν α, β είναι στοιχεία του σώματος για τα οποία ισχύουν $\alpha\beta = 0$ και $\alpha \neq 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας με α^{-1} παίρνουμε $\beta = 0$.

<u>Πρόταση 1</u>.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι σώμα.

<u>Πρόταση 2</u>.

Το σύνολο των πολυωνύμων είναι ακέραια περιοχή, ως εκ τούτου ισχύει:

Αν $f(x)$, $g(x)$ είναι δύο πολυώνυμα με $f(x) \cdot g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$.

<u>Πρόταση 3.</u>

Το σύνολο των συναρτήσεων αποτελεί δακτύλιο ο οποίος έχει μηδενοδιαιρέτες.
Δηλαδή, στις συναρτήσεις ισχύει:

Αν f είναι μία συνάρτηση με $f(x) \neq 0$, υπάρχει συνάρτηση g με $g(x) \neq 0$ τέτοια ώστε να είναι $f(x) \cdot g(x) = 0$. Για παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases},$$

ενώ

$f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ:

Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική μορφή μία διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι:

$$y'' = f(t, y, y') \quad (1)$$

όπου f δοθείσα συνάρτηση.

Η (1) ονομάζεται γραμμική όταν ισχύει:

$$f(t, y, y') = g(t) - p(t)y' - q(t)y \quad (2)$$

Με g, p, q γνωστές.

Η (1) γράφεται: $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$.

Και γενικά:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t) \quad (3)$$

Όταν $G = 0$, τότε η δ.ε. ονομάζεται **ομογενής**. Σε διαφορετική περίπτωση λέγεται **μη ομογενής**.

Θα ασχοληθούμε με ομογενείς δ. ε. και ειδικότερα με αυτές με σταθερούς συντελεστές δηλαδή με δ.ε εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \quad (4)$$

1. Πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Αναζητούμε εκθετικές λύσεις $y = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$.

Από την (4) προκύπτει:

$$\alpha(\,e^{rt})'' + \beta(e^{rt})' + \gamma e^{rt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$ar^2 e^{rt} + \beta r e^{rt} + \gamma e^{rt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$ar^2 + \beta r + \gamma = 0 \quad (5)$$

Η εξίσωση (5) λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Αν r_1, r_2 είναι οι λύσεις της (5), τότε $y_1 = e^{r_1 t}$ και $y_2 = e^{r_2 t}$ είναι λύσεις της (4) όπως και η:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(αρχή της υπέρθεσης).

Παράδειγμα 1ο: Να λυθεί η εξίσωση:

$$y'' - y = 0$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

<u>Λύση</u>

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι: $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1$.

Άρα $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ και $y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$.

Για $t = 0$ είναι: $c_1 + c_2 = 0$ και $c_1 - c_2 = 1$ οπότε $c_1 = \frac{1}{2}$ και $c_2 = -\frac{1}{2}$.

Τελικά: $y = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$.

Παράδειγμα 2ο: Να λυθεί η εξίσωση:

$$2y'' - y' - y = 0$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 4$ και $y'(0) = 2$.

<u>Λύση</u>

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$2r^2 - r - 1 = 0 \ \Leftrightarrow r = 1 \text{ ή } r = -\frac{1}{2}.$$

Άρα $y = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}$ και $y' = c_1 e^t - \frac{1}{2} c_2 e^{-\frac{1}{2}t}$.

Για $t = 0$ είναι: $c_1 + c_2 = 4$ και $c_1 - \frac{1}{2} c_2 = 1$, οπότε $c_1 = 2$ και $c_2 = 2$.

Άρα $y = 2e^t + 2e^{-\frac{1}{2}t}$.

2. Μιγαδικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Είδαμε ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4) είναι η:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Όπου οι πραγματικοί αριθμοί r_1, r_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ar^2 + \beta r + \gamma = 0$. Αυτό συμβαίνει όταν για τη διακρίνουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ισχύει:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0.$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι για τη διακρίνουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ισχύει:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0.$$

Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες:

$r_1 = \varphi + i\omega$ και $r_1 = \varphi - i\omega, \quad \varphi, \omega \in \mathbb{R}$

οπότε δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (4) είναι οι:

$y_1 = e^{(\varphi + i\omega)t}$ και $y_1 = e^{(\varphi - i\omega)t}, \quad \varphi, \omega \in \mathbb{R}$

Συνεπώς, από την αρχή της υπέρθεσης, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4) είναι:

$$y = k_1 e^{(\varphi + i\omega)t} + k_2 e^{(\varphi - i\omega)t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τον τύπο του Euler:

$$e^{\pm i\theta} = \sigma\upsilon\nu\theta \pm i\eta\mu\theta \quad \theta \in \mathbb{R}$$

η εξίσωση (6) γράφεται:

$$y = k_1 e^{(\varphi + i\omega)t} + k_2 e^{(\varphi - i\omega)t} \Rightarrow$$

$$y = e^{\varphi t}[(k_1 + k_2)\sigma\upsilon\nu\omega t + i(k_1 - k_2)\eta\mu\omega t] \Rightarrow$$

$$y = e^{\varphi t}[c_1 \sigma\upsilon\nu\omega t + c_2 \eta\mu\omega t]$$

όπου:

$c_1 = k_1 + k_2$ και $c_2 = i(k_1 - k_2)$.

Παράδειγμα: Να λύθεί η εξίσωση:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

με αρχικές συνθήκες $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

<u>Λύση</u>

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = 1 + 2i \text{ ή } r = 1 - 2i.$$

Άρα $y = e^t[c_1 \sigma\upsilon\nu 2t + c_2 \eta\mu 2t]$ και $y' = e^t[-2c_1 \eta\mu 2t + 2c_2 \sigma\upsilon\nu 2t]$.

Για $t = \frac{\pi}{2}$ είναι: $c_1 = 0$ και $c_2 = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Άρα $y = -e^{t-\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2t$.

3. Πολλαπλές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Υποθέτουμε, τώρα, ότι για τη διακρίνουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ισχύει:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0.$$

Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα:

$$r = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

οπότε μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (4) είναι η:

$$y_1 = e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} \quad (7)$$

Για να βρούμε και μία άλλη λύση της διαφορικής εξίσωσης (4) εργαζόμαστε ως εξής. Υποθέτουμε ότι:

$$y = u \cdot y_1 \Rightarrow y = u \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} \quad (8)$$

Τότε:

$$y' = u' \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} - \frac{\beta}{2\alpha} u \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t}$$

$$y' = \left(u' - \frac{\beta}{2\alpha} u\right) e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} \quad (9)$$

και:

$$y'' = u'' \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} - \frac{\beta}{2\alpha}u' \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} - \frac{\beta}{2\alpha}u' \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}u \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} \Rightarrow$$

$$y'' = u'' \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} - \frac{\beta}{\alpha}u' \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}u \cdot e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} \Rightarrow$$

$$y'' = \left(u'' - \frac{\beta}{\alpha}u' - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}u\right)e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} \quad (10)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (8), (9) και (10) στην εξίσωση (4), έχουμε:

$$\alpha\left(u'' - \frac{\beta}{\alpha}u' + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}u\right)e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} + \beta\left(u' - \frac{\beta}{2\alpha}u\right)e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} + \gamma u e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha\left(u'' - \frac{\beta}{\alpha}u' + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}u\right) + \beta\left(u' - \frac{\beta}{2\alpha}u\right) + \gamma u = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha u'' + (-\beta + \beta)u' + \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - \frac{\beta^2}{2\alpha} + \gamma\right)u = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha u'' + (-\beta + \beta)u' - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}u = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha u'' = 0 \Rightarrow$$

$$u = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Άρα, από την εξίσωση (8) έχουμε ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4) είναι:

$$y = c_1 t e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} + c_2 e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα: Να λύθεί η εξίσωση:

$$9y'' - 12y' + 4y = 0$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 2$ και $y'(0) = -1$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$9r^2 - 12r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}.$$

Άρα $y = c_1 t e^{\frac{2}{3}t} + c_2 e^{\frac{2}{3}t}$ και $y' = e^{\frac{2}{3}t}\left(\frac{5}{3}c_1 + c_2\right)$.

Για $t = 0$ είναι: $c_2 = 2$ και $\frac{5}{3}c_1 + c_2 = -1$, οπότε $c_1 = -\frac{7}{3}$ και $c_2 = 2$.

Άρα $y = -\frac{7}{3}te^{\frac{2}{3}t} + 2e^{\frac{2}{3}t}$.

Συνοπτικά, για τις λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$$

έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Διακρίνουσα χαρακτηριστικού πολυωνύμου	**Ρίζες χαρακτηριστικού πολυωνύμου**	**Γενική λύση**
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$	$r_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$	$r_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$y = e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t}\left[c_1 \sigma\upsilon\nu \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}t + c_2 \eta\mu \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}t\right]$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$	$r = -\frac{\beta}{2\alpha}$	$y = c_1 t e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t} + c_2 e^{-\frac{\beta}{2\alpha}t}$

Βιβλιογραφία – Bibliography

- Michael Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός – Μια εισαγωγή στην Ανάλυση*, (2007), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Thomas B. George – Finney L. Ross, Massachusetts Institute of Technology, *Απειροστικός Λογισμός – Διαφορικές Εξισώσεις*, (2001), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Bronson Richard, Ph. D., Department of Mathematics and Computer Science Fairleigh Dickinson University, *Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις*, (1978), Schaum's Outline Series, Mc Graw – Hill, New York και ΕΣΠΙ, Αθήνα.
- Σιαφαρίκας Δ. Παναγιώτης, Πανεπιστήμιο Πατρών, *Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων*, Τόμος ΙΙ, (2004), Πάτρα.
- Σιαφαρίκας Δ. Παναγιώτης, Πανεπιστήμιο Πατρών, Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, (2003), Πάτρα.
- Howard Eves, University of Maine and University of Central Florida, *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Third Edition, Dover Publications, Inc. Mineola, New York.
- Brand Louis, University of Cincinnati, *Advanced Calculus (Μαθηματική Ανάλυση)*, (1984), Εκδόσεις Ι. Συμεών, Ε.Μ.Ε.
- Ανδρεαδάκης Α. Στυλιανός, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Μαθήματα επί της Θεωρίας Ομάδων, (1976), Αθήνα.
- Stephenson G., Imperial College, University of London, *Mathematical Methods for Science Students*, (1974), Αθήνα.
- Freudenthal Hans, Utrecht, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Netherlands.
- William E. Boyce – Richard C. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., (1999), Αθήνα