3ωρη ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

9/5/2014

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Αξιοποιώντας τα παρακάτω παραθέματα προσπαθήστε να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν:

Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

ΑΠ1 «… *Πυθαγόρας … τὸ μὲν πρῶτον διεπονεῖτο περὶ τὰ μαθήματα καὶ τοὺς ἀριθμούς*» (DK 14.7)

ΑΠ2 «*Τὴν περὶ τοὺς ἀριθμούς πραγματείαν μάλιστα πάντων τιμῆσαι δοκεῖ Πυθαγόρας καὶ προαγαγεῖν εἰς τὸ πρόσθεν ἀπαγαγὼν ἀπὸ τῆς τῶν ἐμπόρων χρείας…*» (DK 58B2)

ΑΠ3 «*Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτήν (γεωμετρίαν) φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος.*» (DK 14.6a)

ΑΠ4 «… *οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχάς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν εἶναι τῶν πάντων.*» (*Ἀριστοτέλης, Μετὰ τὰ Φυσικὰ, 985b24*)

- Ποιο είναι το βασικό αντικείμενο του Πυθαγόρα και των Πυθαγορείων εν γένει;
- Σε τι συνίσταται η προσφορά του Πυθαγόρα και των Πυθαγορείων με βάση τα παραπάνω αποσπάσματα;
- Πώς αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά οι Πυθαγόρειοι; Ποια φιλοσοφική διάσταση αποκτούν τα μαθηματικά κατά τους Πυθαγόρειους;
- Να γράψετε μία σύντομη παράγραφο με τις επισημάνσεις που κάνατε, αξιοποιώντας τα παραπάνω κείμενα.

Βασικές αρχές της Πυθαγόρειας διδασκαλίας

ΑΠ5 «*πάντα δὲ οὕτως ‹καλούμενα› Ἀκούσματα*[1] *διήρηται εἰς τρία εἴδη· τὰ μὲν γὰρ αὐτῶν σημαίνει τί ἐστι* (= τι είναι ένα πράγμα), *τὰ τι μάλιστα* (= ποιο είναι το άκρον άωτον ενός πράγματος), *τὰ δὲ τι δεῖ πράττειν ἢ μὴ πράττειν.*

τὰ μὲν οὖν τι ἐστι τοιαῦτα, *οἷον τί ἐστιν αἱ μακάρων νῆσοι; ἥλιος καὶ σελήνη. τί ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς μαντεῖον; τετρακτύς· ὅπερ ἐστὶν ἡ ἁρμονία, ἐν ᾗ αἱ Σειρῆνες.* ***τὰ δὲ τί μάλιστα***, *οἷον τί τὸ δικαιότατον; θύειν. τί τὸ σοφώτατον; ἀριθμός, δεύτερον δὲ ὁ τοῖς πράγμασι τὰ ὀνόματα θέμενος. τί σοφώτατον τῶν παρ' ἡμῖν; ἰατρική. τί κάλλιστον; ἁρμονία. τί κράτιστον; γνώμη. τί ἄριστον; εὐδαιμονία. τί δὲ ἀληθέστατον λέγεται; ὅτι πονηροὶ οἱ ἄνθρωποι.*» (*Ιάμβλιχος, Περί τοῦ πυθαγορικοῦ βίου 82*)

ΑΠ6 «*ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων* (= πολλαπλότητας) *ἕνωσις καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις*» (DK 44B10)

ΑΠ7 «*ἐπειδὴ τέλειον ἡ δεκὰς εἶναι δοκεῖ καὶ πᾶσαν περιειληφέναι τὴν τῶν ἀριθμῶν φύσιν*»

ΑΠ8 «*τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας,*

πέρας ἄπειρον
περιττὸν ἄρτιον
ἓν πλῆθος
δεξιὸν ἀριστερὸν
ἄρρεν θῆλυ
ἠρεμοῦν κινούμενον
εὐθὺ καμπύλον
φῶς σκότος
ἀγαθὸν κακὸν
τετράγωνον ἑτερόμηκες·»

(*Αριστοτέλης, Μετὰ τὰ Φυσικὰ, 986a9/986a22–27*)

[1] Διάφοροι συγγραφείς της όψιμης αρχαιότητας διαφυλάσσουν συλλογές αφορισμών, που τους παρουσιάζουν ως τμήμα της πυθαγόρειας διδασκαλίας. Φαίνεται ότι οι αφορισμοί αυτοί μεταδίδονταν προφορικά από στόμα σε στόμα, όπως δείχνει το όνομα *ἀκούσματα*.

- Ποιες μαθηματικές έννοιες μπορείτε να διακρίνετε στα παραπάνω αποσπάσματα;
- Πώς προσδιορίζονται αυτές οι έννοιες; Ή αλλιώς ποια χαρακτηριστικά τους αποδίδονται;
- Μπορείτε να σκεφτείτε λόγους που τους αποδίδονται αυτά τα χαρακτηριστικά; Με βάση τις γνώσεις που έχετε, συμφωνείτε με αυτές τις αναφορές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- Συνδέονται τα μαθηματικά με τη μουσική; Αναζητήστε σχετικές αναφορές στα αποσπάσματα που προηγήθηκαν.
- Να γράψετε μία σύντομη παράγραφο με τις επισημάνσεις που κάνατε, αξιοποιώντας τα παραπάνω κείμενα.

Ο ΖΗΝΩΝ

1) Διχοτομία ~ Το Στάδιον

Το πρόβλημα: …*πρῶτος μὲν ὁ περὶ τοῦ μὴ κινεῖσθαι διὰ τὸ πρότερον εἰς τὸ ἥμισυ δεῖν ἀφικέσθαι τὸ φερόμενον ἢ πρὸς τὸ τέλος* … *οὐκ ἐνδέχεται κινεῖσθαι οὐδὲ τὸ στάδιον διελθεῖν.* (DK 29 a 25)

Ο συλλογισμός:

Οὐκ ἔστι τὸ στάδιον διελθεῖν **[αποδεικτέα θέση]**

1. *ἀεὶ γάρ πρότερον εἰς τὸ ἥμισυ δεῖ ἀφικέσθαι ἤ πρὸς τὸ τέλος*
2. *ἄπειρα δέ τά ἡμίση ταῦτα*
3. *ἄπειρα δέ οὐκ ἔστι διελθεῖν*

Η λύση (;): *διό καὶ ὁ Ζήνωνος λόγος ψεῦδος λαμβάνει τὸ μὴ ἐνδέχεσθαι τὰ ἄπειρα διελθεῖν ἢ*

ἅψασθαι (να έρθει σε επαφή) *τῶν ἀπείρων καθ' ἕκαστον ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ. διχῶς* (με δύο τρόπους/διττά) *γὰρ λέγεται καὶ τὸ μῆκος καὶ ὁ χρόνος ἄπειρον, καὶ ὅλως πᾶν τὸ συνεχές, ἤτοι* ***κατὰ διαίρεσιν*** *ἢ* ***τοῖς ἐσχάτοις****. τῶν μὲν οὖν κατὰ ποσὸν* (ποσοτικά) *ἀπείρων* ***οὐκ ἐνδέχεται*** *ἅψασθαι ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ, τῶν δὲ κατὰ διαίρεσιν* ***ἐνδέχεται****· καὶ γὰρ αὐτὸς ὁ χρόνος οὕτως ἄπειρος.* ***ὥστε ἐν τῷ ἀπείρῳ καὶ οὐκ ἐν τῷ πεπερασμένῳ συμβαίνει διιέναι τὸ ἄπειρον, καὶ ἅπτεσθαι τῶν ἀπείρων τοῖς ἀπείροις, οὐ τοῖς πεπερασμένοις.*** (*Ἀριστοτέλης*, *Φυσικὰ Ζ 2, 233a 21*)

3) Ο Αχιλλέας και η χελώνα Το πρόβλημα: *δεύτερος δ' ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς. ἔστι δ' οὗτος ὅτι τὸ βραδύτατον* ***οὐδέποτε*** *καταληφθήσεται θέον ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἔμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἐλθεῖν τὸ διῶκον ὅθεν ὥρμησε τὸ φεῦγον, ὥστ'* ***ἀεί*** *τι προέχειν ἀναγκαῖον τὸ βραδύτερον.*

Η λύση: *ἔστι δὲ καὶ οὗτος ὁ αὐτὸς λόγος τῷ διχοτομεῖν, διαφέρει δ' ἐν τῷ διαιρεῖν μὴ δίχα* (σε δύο μισά) *τὸ προσλαμβανόμενον* (το προστιθέμενο) *μέγεθος.* (***Ἀριστοτέλης***, ***Φυσικὰ Ζ 9, 239b 14***)

3) Το Βέλος [*οἰστός φερομένη*] 4) Οι «**Κινούμενες σειρές**»

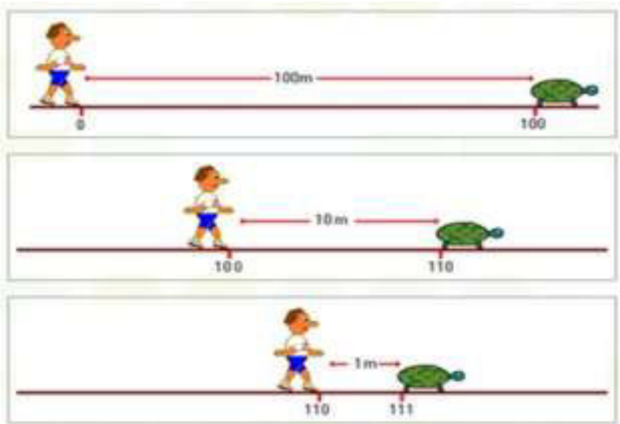
Το Παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας

Ο Αχιλλέας συναγωνίζεται μία χελώνα που ξεκίνησε πριν από αυτόν και δε θα μπορέσει ποτέ να προηγηθεί της χελώνας. Τη χρονική στιγμή που ο Αχιλλέας θα έχει φθάσει στην αρχική θέση της χελώνας, αυτή θα έχει προηγηθεί λίγο ακόμη. Η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον και έτσι ποτέ ο Αχιλλέας δε θα φθάσει και επομένως προσπεράσει τη χελώνα.

Επομένως έχουμε το παράδοξο *"ο ταχύτερος ουδέποτε θα προσπεράσει τον βραδύτερο''*

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Υποθέτουμε πως η χελώνα ξεκινάει 100m μπροστά από τον Αχιλλέα ο οποίος τρέχει με ταχύτητα 10m/s. Έστω ότι η χελώνα κινείται με ταχύτητα 1m/s. Όταν λοιπόν ο Αχιλλέας θα έχει διανύσει τα 100m, η χελώνα θα βρίσκεται 10m μπροστά του. Όταν θα διανύσει αυτά τα 10 μέτρα, η χελώνα θα βρίσκεται 1m μπροστά του. Όταν διανύσει αυτό το 1m, η χελώνα θα βρίσκεται 0,1m μπροστά του, και ούτω καθεξής. Επομένως, σύμφωνα με τον Ζήνωνα, ο Αχιλλέας δε θα προσπεράσει ποτέ τη χελώνα

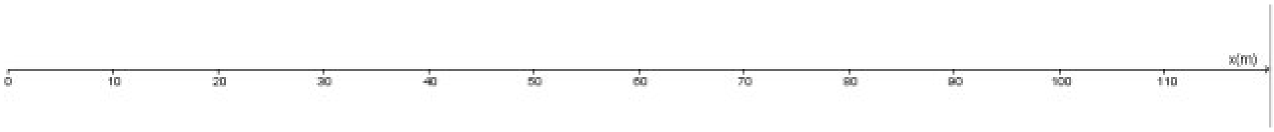


Είναι μια προφανής *αντινομία*, η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι *"το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων είναι άπειρο"* . Η κίνηση επομένως είναι αδύνατη αν δεχθούμε την ύπαρξη των άπειρων υποδιαιρέσεων του χώρου και του χρόνου. Να αποδειχθεί ότι ο παραπάνω ισχυρισμός, ο οποίος έρχεται σε αντίθεση με την κοινή λογική, δεν ευσταθεί και ότι ο Αχιλλέας τελικά θα φθάσει τη χελώνα μετά από $\frac{100}{9}$ sec.

1^{η} προσέγγιση: Η απόδειξη του προφανούς – Ενίσχυση της αντινομίας. Ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα.

<u>**Μοντελοποίηση**</u>

1. Η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση, επάνω στον άξονα x΄x. Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ (έναρξη του αγώνα) ο Αχιλλέας βρίσκεται στο σημείο Α με τετμημένη $x=$ …… ενώ η χελώνα βρίσκεται στο σημείο Χ, με τετμημένη $x=$ ……

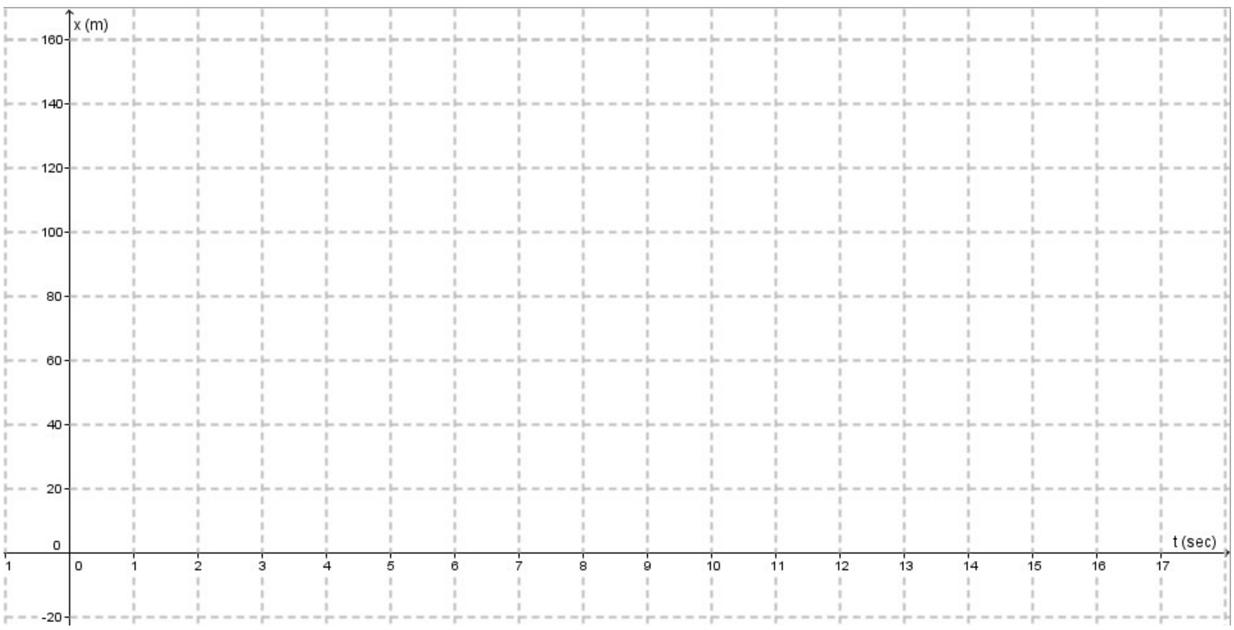


2. Η εξίσωση κίνησης της θέσης του Αχιλλέα κάθε χρονική στιγμή t, είναι: $h(t)=$ ………………………

3. Η εξίσωση κίνησης της θέσης της χελώνας κάθε χρονική στιγμή t, είναι: $p(t)=$ ………………………

4. Θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων tOx, όπου *t(s)* και *x(m).* Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο Αχιλλέας βρίσκεται ………………………, στο σημείο ………., ενώ η χελώνα βρίσκεται στη θέση Χ (… , …).

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων είναι:



5. Γραφική – Διαισθητική προσέγγιση:

Από τη γραφική παράσταση να ελέγξετε αν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία ο Αχιλλέας και η χελώνα θα συναντηθούν. Πόσο διάστημα έχουν διανύσει; Θα ξεπεράσει ο Αχιλλέας τη χελώνα; Μπορείτε να δώσετε ακριβείς απαντήσεις; Ποια είναι η χρησιμότητα της γραφικής παράστασης;

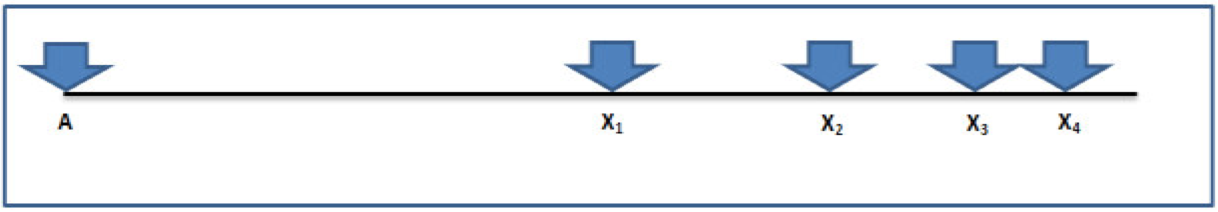
………
………

6. Αλγεβρική Επίλυση:
Γιατί οι δύο ευθείες τέμνονται; Να βρείτε το κοινό σημείο των δύο ευθειών. Ποια χρονική στιγμή συναντώνται; Τι διάστημα έχουν διανύσει κατά τη στιγμή της συνάντησης;

……
……
……
……

<u>2η προσέγγιση</u> : Η ουσία του παραδόξου: **“το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων είναι πεπερασμένο”**

Άθροισμα απείρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου



Υποθέτουμε πως η χελώνα ξεκινάει $100m$ μπροστά από τον Αχιλλέα ο οποίος τρέχει με ταχύτητα $v_A = 10\, m/s$ ενώ η χελώνα κινείται με ταχύτητα $v_X = 1\, m/s$

1. Η αρχική θέση του Αχιλλέα είναι η Α και της χελώνας η X_1

α) Η απόσταση τους είναι AX_1 = ……

β) Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση AX_1 είναι: t_1= …………….

2.α) Κατά τη διάρκεια του χρόνου t_1, η χελώνα έχει προχωρήσει στη θέση X_2, διανύοντας διάστημα

$X_1X_2 =$
……..

β) Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση X_1X_2 είναι: $t_2 =$ …………….

3. α) Κατά τη διάρκεια του χρόνου t_2, η χελώνα έχει προχωρήσει στη θέση X_3, διανύοντας διάστημα

$X_2X_3 =$ ………………………………………………………………………………………………….

β) Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση X_2X_3 είναι: $t_3 =$……………….

4. α) Κατά τη διάρκεια του χρόνου t_3, η χελώνα έχει προχωρήσει στη θέση X_4, διανύοντας διάστημα

$X_3X_4 =$ ……………………………………………………………………………………………………….

β) Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση X_3X_4 είναι: $t_4 =$………………

Η κίνηση αυτή θα συνεχίζεται επ' άπειρο. Έτσι κατέληξε ο Ζήνων, ότι ο Αχιλλέας δε θα φτάσει ποτέ τη χελώνα.

Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι το ………………………………. …….. Δηλαδή:

$$t_{o\lambda} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 10 + \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right)$$

Η παρένθεση περιέχει το άθροισμα απείρων όρων μίας ……………. προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 =$…….
και λόγο $\lambda =$…… , η οποία έχει όρους που συνεχώς ελαττώνονται (απολύτως φθίνουσα). Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα τους δίνεται από τον τύπο $S_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$ **(*)**

Άρα $t_{o\lambda} =$ ………………………

Επομένως ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα σε ……… sec και προφανώς θα την προσπεράσει.

(*) <u>Σχόλιο</u>: Μία προσπάθεια κατανόησης του τύπου:

Ζητάμε το άθροισμα των άπειρων όρων $S_\infty = \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right)$

Είναι γνωστό ότι το άθροισμα του πεπερασμένου πλήθους των ν – πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, είναι: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, όταν $\lambda \neq 1$ και $S_\nu = \nu \cdot \alpha 1$, όταν $\lambda=1$

Επομένως στο παρόν πρόβλημα είναι:

$$S_\nu = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^\nu - 1}{\frac{1}{10} - 1} \Rightarrow S_\nu = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^\nu}\right)$$

Είναι προφανές ότι όσο …………. όρους ν πάρουμε, τόσο ……………. το S_ν θα ……………. το S_∞

Επιπλέον, όταν το ν …………, το κλάσμα $\frac{1}{10^\nu}$ γίνεται ……………… και όταν το ν *τείνει στο άπειρο* το $\frac{1}{10^\nu}$ *τείνει στο μηδέν* και το S_∞=…………………..

Albert Einstein: "Δύο πράγματα είναι άπειρα. Το σύμπαν και η ανθρώπινη βλακεία, αν και δεν είμαι καθόλου σίγουρος για το πρώτο"