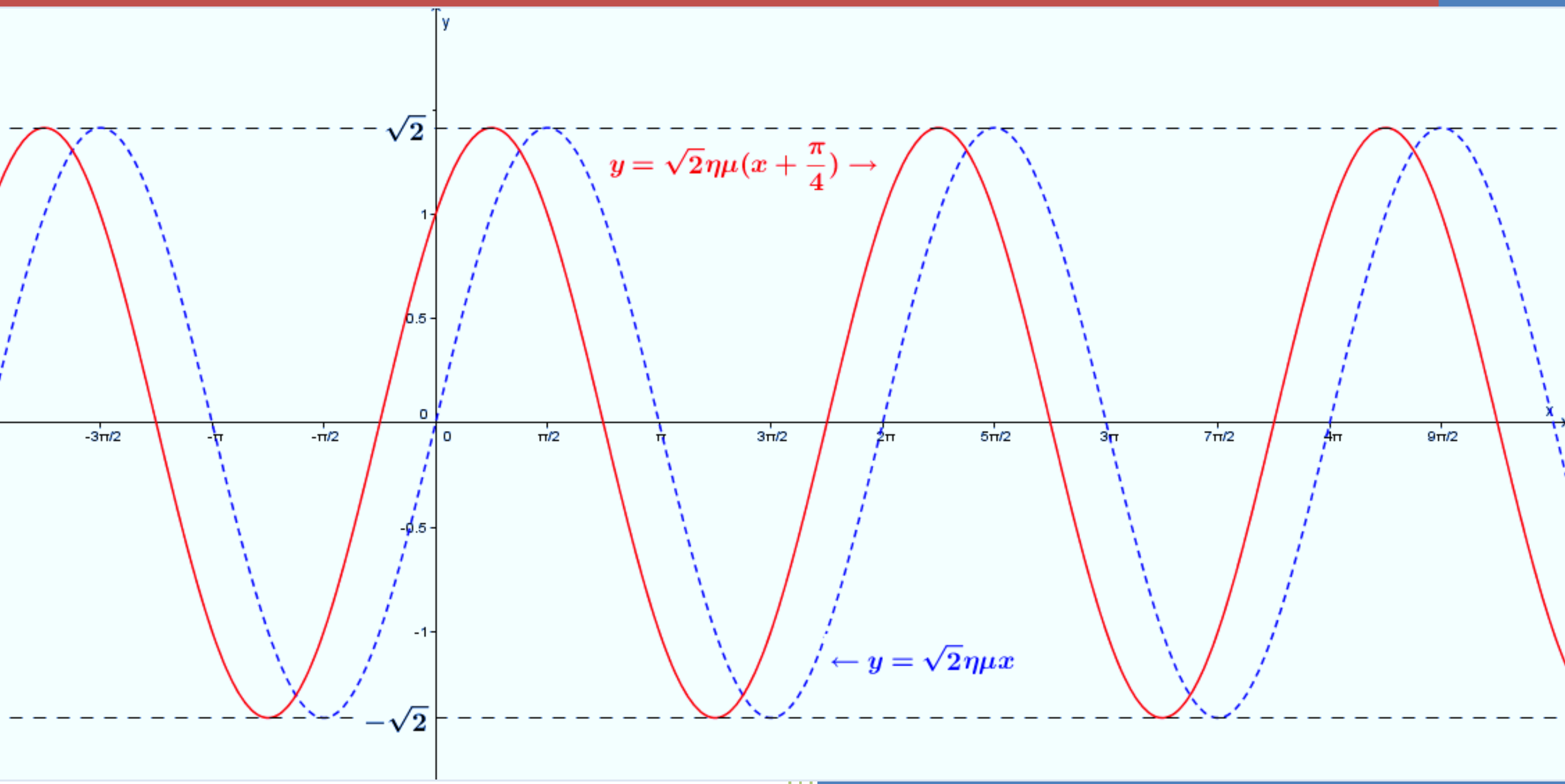
ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



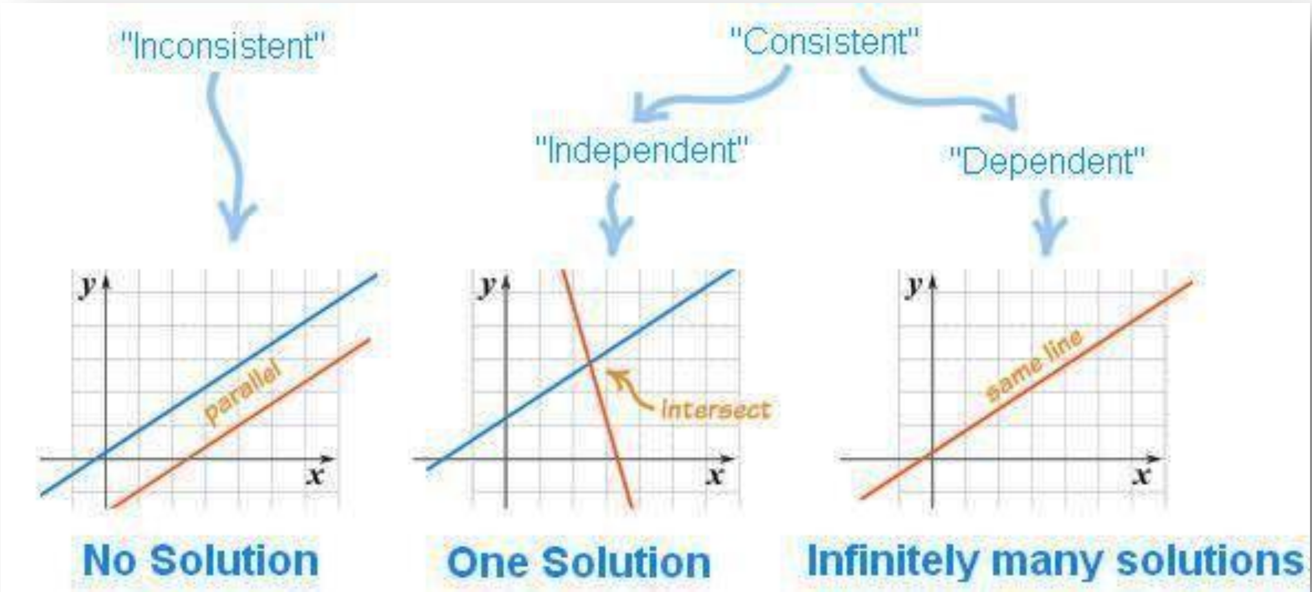
ΑΛΚΙΒΙΑΔΗΣ Γ. ΤΖΕΛΕΠΗΣ

ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

Περιεχόμενα

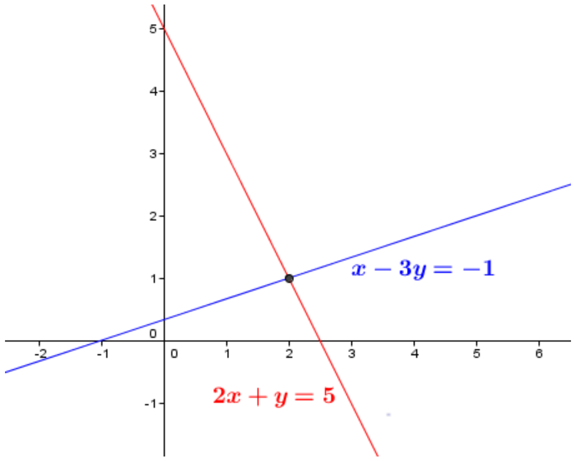
ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{ο}$: Συστήματα



1.1 Γραμμικά Συστήματα

1. Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$

   (Ακολουθεί η γραφική λύση της εξίσωσης)



2. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε τα παρακάτω συστήματα να είναι συγχρόνως αδύνατα:

   $\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha - 1)x - \beta y = 2 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\Sigma_2: \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + \alpha y = 2 \end{cases}$

3. Δίνονται τα συστήματα:

   $\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha + 1)x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $\Sigma_2: \begin{cases} x + (\beta + 2)y = \alpha^2 + 1 \\ x - (\alpha - 1)y = \beta^3 \end{cases}$, με α, β $\in R$

   Να αποδείξετε ότι αν το Σ_1 έχει άπειρες λύσεις, τότε το Σ_2 είναι αδύνατο

4. Δίνεται το σύστημα Σ: $\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases}$, $\lambda \in R$

   i) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε πραγματικό αριθμό λ

   ii) Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y

   iii) Για ποια τιμή του λ, η λύση (x, y) που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα επαληθεύει τη σχέση $x + y = \frac{11}{13}$

5. Δίνεται το σύστημα Σ: $\begin{cases} (2\mu - 3)x + y = \mu + 4 \\ 5\mu x - 3y = 3\mu + 2 \end{cases}$, $\mu \in R$

   Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(10, k)$, να βρεθεί το $k \in R^*$

6. Δίνεται το σύστημα Σ: $\begin{cases} 2x - y = -z \\ x + y = 3z + 2 \end{cases}$

   Να βρείτε τις λύσεις του, αν γνωρίζετε ότι οι x, y, z είναι ακέραιοι και επιπλέον ότι ο z είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ακεραίου δια του 3

7. Να βρείτε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού κ, το σύστημα $\begin{cases} x + \kappa y = 3 \\ \kappa x + 4y = 6 \end{cases}$ δέχεται μία λύση, η οποία είναι ζεύγος φυσικών αριθμών

8. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1:\ x - y = -1$$

$$\varepsilon_2:\ \lambda x - y = -1$$

α) Να βρείτε τις σχετικές θέσεις των ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

β) Να βρείτε το λ, για το οποίο οι δύο ευθείες τέμνονται κάθετα.

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις δύο ευθείες και τον άξονα x΄x

9. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 2 \\ 3x + (\lambda - 4)y = 1 \end{cases}$, $\lambda \in R$

10. Για ένα σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$\begin{cases} D_x + D_y = D \\ D_x - D_y = 3D \end{cases}$$

Αν το (Σ) έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή

11. Για ένα σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = 2D_xD_y \quad \text{και} \quad D \neq 0$$

Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x, y

12. Για ένα σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$

α) Να αποδείξετε ότι $(D-2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$

β) Να βρεθούν τα x, y

13. Για ένα σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$\begin{cases} D + D_x = 2 \\ D_x + D_y = -2 \\ D_x + D = -8 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα x, y

14. Ένα σχολείο της Αθήνας διοργανώνει εκδρομή για την Πορταριά του Πηλίου. Οι διοργανωτές γνωρίζουν ότι αν το εκδρομικό πούλμαν κινείται με σταθερή ταχύτητα 60 km/h θα φθάσουν στον προορισμό τους στις 13.00. Αν κινείται με 80 km/h θα φθάσουν στις 11.00 το πρωί. Να βρείτε την απόσταση Αθηνάς – Πορταριάς και την ώρα εκκίνησης.

15. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρείτε πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα χρόνια βασίλεψε.
16. Ένας πατέρας με διαθήκη μοιράζει ένα ποσό στα τρία παιδιά του Α, Β, Γ άνισα, ανάλογα με τους αριθμούς 7, 6, 5. Στη συνέχεια, με δεύτερη διαθήκη, αλλάζει τα μερίδια και διανέμει το ποσό ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5 και 4.
α) Ποιος από τους κληρονόμους κερδίζει με τη νέα διαθήκη και ποιος χάνει;
β) Ένας από τους κληρονόμους κερδίζει με τη δεύτερη διανομή 200 ευρώ περισσότερα από ότι κέρδιζε με την πρώτη. Πόση ήταν η κληρονομιά και πόσο κάθε μερίδιο με τη δεύτερη διανομή;
17. Δίνεται ένας τριψήφιος φυσικός αριθμός για τον οποίο γνωρίζουμε τα εξής:
i) το άθροισμα των ψηφίων του είναι 24
ii) αν αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του, ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9
iii) αν αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του, ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90
Να βρείτε τον αριθμό
18. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+y+z\ =1 \\ x+2y+4z=8 \end{cases} \qquad \Sigma_2: \begin{cases} x+2y+z\ =2 \\ x+y+2z=-1 \\ x+3y\ =\ 6 \end{cases} \qquad \Sigma_3: \begin{cases} x-12y-z=-6 \\ x+2y+z\ =\ 4 \\ 3x-y+2z\ =7 \end{cases}$$

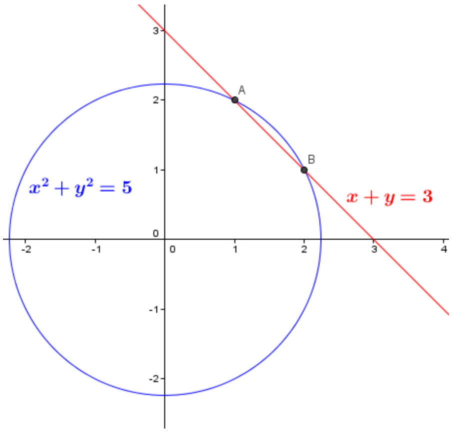
19. Δύο κινητά κινούνται ευθύγραμμα στο επίπεδο. Το πρώτο από το σημείο $A(-2,1)$ προς το σημείο $B(10,10)$ και το δεύτερο από το σημείο $\Gamma(-5,5)$ προς το σημείο $\Delta(10,-2)$.
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο κινητά και να κάνετε τη γραφικής τους παράσταση
β) Να βρείτε το κοινό σημείο της διαδρομής τους

1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

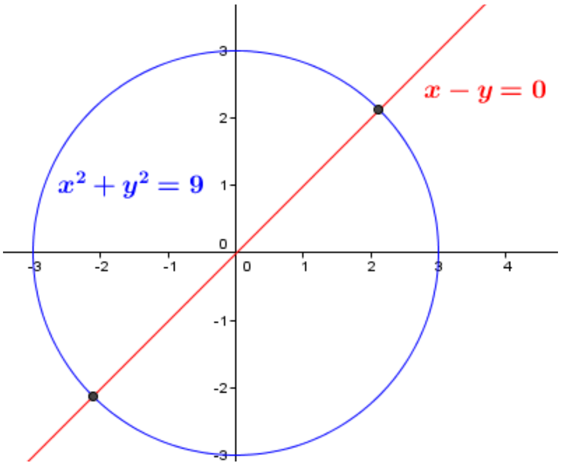
(Η πρώτη εξίσωση του συστήματος παριστάνει κύκλο και η δεύτερη ευθεία, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα)



2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β, τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

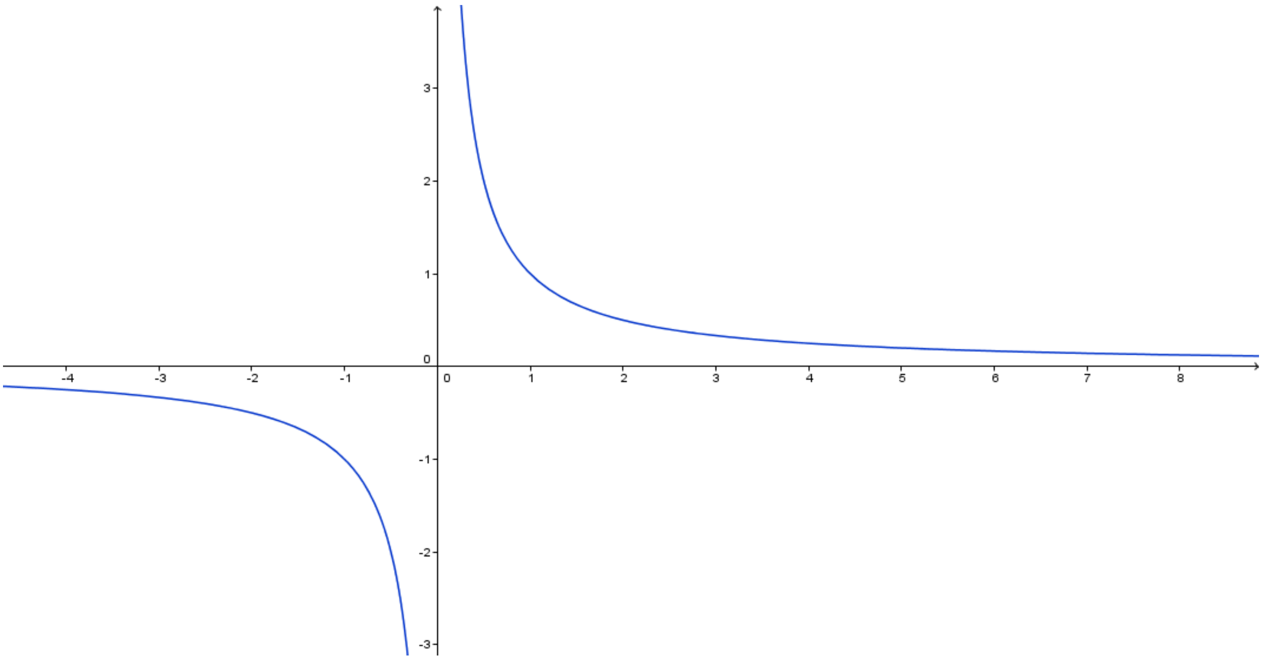
$$\alpha^2 + \beta^2 = 16 \ \text{ και } \ \alpha + \beta = 6$$

3. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία του κύκλου με την ευθεία $x - y = 0$
(Ακολουθεί η γραφική λύση του συστήματος)



4. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x + 3$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$
Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, η ευθεία εφάπτεται του κύκλου;

5. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ y = \lambda x + 1 \end{cases}$, $\lambda \in R$
i) Να λύσετε το σύστημα για κάθε τιμή της παραμέτρου λ
ii) Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $x \cdot y = 1$ είναι μία ισοσκελής υπερβολή (σχήμα)



α) Να σχεδιάσετε την ευθεία που τέμνει την ισοσκελή υπερβολή

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που εφάπτεται στην υπερβολή

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0,$ με $\alpha, \beta \in R$

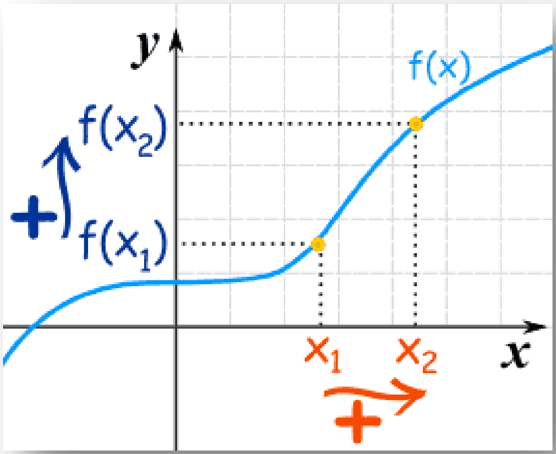
   Να βρεθούν οι τιμές των α, β έτσι ώστε αυτές να αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης.

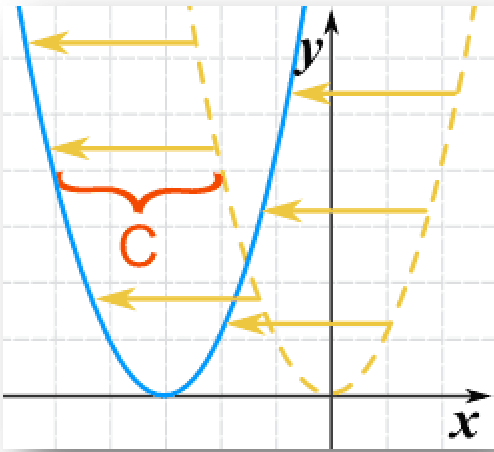
7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0,$ με $\alpha, \beta \in R$

   Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α και β, έτσι ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2 και 3.

8. Ένας χορογράφος σχεδιάζοντας τις θέσεις των χορευτών σε μία χορογραφία, θέλει να τους διατάξει σε τετράγωνο. Αν σχηματίσει x σειρές με x χορευτές σε κάθε σειρά, θα του περισσέψουν 10 χορευτές. Αν προσθέσει 2 χορευτές σε κάθε σειρά για να σχηματίσει ένα νέο τετράγωνο, θα του λείπουν 10 χορευτές. Να βρεθεί ο αριθμός x των χορευτών μιας σειράς του πρώτου τετραγώνου και ο συνολικός αριθμός y των χορευτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων





2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες – Μεταφορά αξόνων

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x+2, & \alpha\nu \;\; x\le 2 \\ \frac{1}{4}x^2, & \alpha\nu \;\; x>2 \end{cases}$

   α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της στο πεδίο ορισμού της

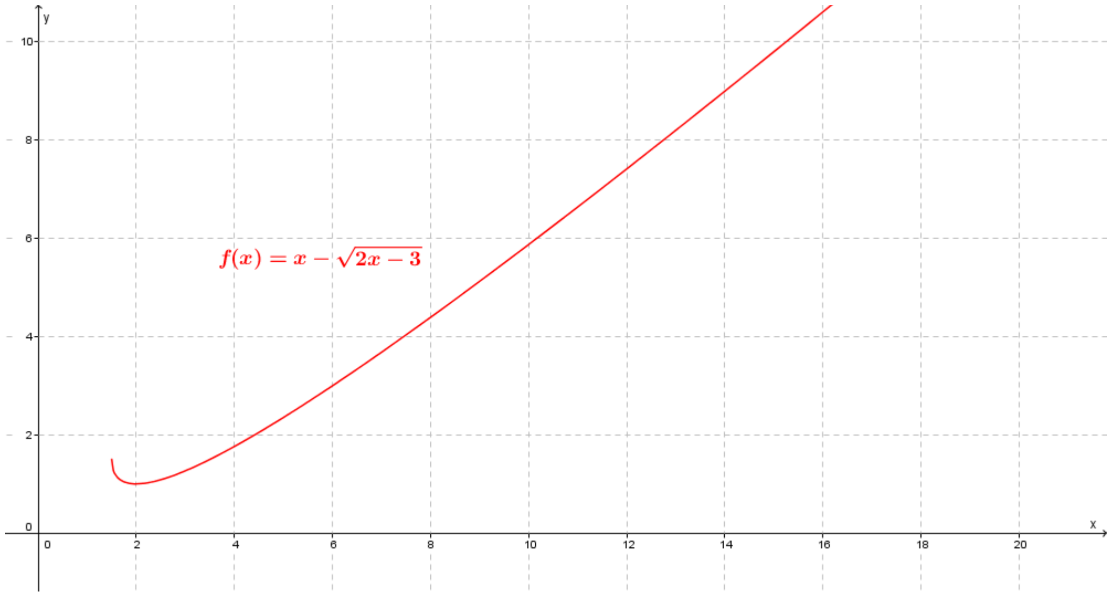
   β) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

   γ) Στη συνέχεια, να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in R$, έτσι ώστε η ευθεία $y=\kappa$ να τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε δύο σημεία

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x-\sqrt{2x-3}$ έχει ελάχιστη τιμή το 1

   Βρείτε το σημείο στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο

   (Ακολουθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης)



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x|x|, & \alpha\nu \;\; x\le 2 \\ \frac{4}{x}, & \alpha\nu \;\; x>2 \end{cases}$

   α) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

   β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

   γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, την οποία να βρείτε

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x-1, & \alpha\nu\ \ x<-1\\ 2x+\beta, & \alpha\nu\ \ x>1\end{cases}$

   Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία M(-2,-5) και N(3,7)

   α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β

   β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

5. α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

   β) Να λύσετε την εξίσωση $(2x+5)^3-8x^3-125=0$

   γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\left(|x|+1\right)^3-|x|^3-1}{|3x|}$. Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

6. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=x^2-\pi x+\rho,\ \ \pi,\rho\in R$

   i) Αν η γραφική παράσταση της φ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία, να αποδείξετε ότι $\pi^2>4\rho$

   ii) Αν η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι τέμνει τον άξονα x΄x και στο σημείο Α(π,0)

   iii) Αν η συνάρτηση είναι άρτια, να αποδείξετε ότι π = 0

7. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης φ (x) = 2 x – 6

   i) αν το πεδίο ορισμού είναι το Α = R

   ii) αν το πεδίο ορισμού είναι το Α = [-5, 3]

8. Να υπολογισθούν οι τιμές του x, που επαληθεύουν την ανίσωση g (x – 5) < g (7 – 2 x) , αν η g είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο R

9. Δίνεται η συνάρτηση φ (x) = 2 x +5

   Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθής;

   Α. φ (x +2) < φ (x +5) Β. φ (x +2) > φ (x +5) Γ. φ (x +2) = φ (x +5)

10. Αν η συνάρτηση g / R είναι περιττή και g (x – 5) = 8, να υπολογίσετε το g (5 – x)

11. α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η γραφική παράσταση της θα τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο. Μπορείτε να δικαιολογήσετε την πρόταση;

    β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=2002x^{2001}+2x-2004$, $x\in R$

    ι) Σε πόσα σημεία η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x ;

    ιι) Να αποδείξετε ότι $f\left(4^6\right)>f\left(5^5\right)$

    ιιι) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)<f\left(2\right)$

12. Δίνεται η συνάρτηση f, έτσι ώστε:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in R$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και ότι η συνάρτηση είναι περιττή

β) Αν η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο, τότε να αποδείξετε ότι στο $-x_0$ θα παρουσιάζει μέγιστο

γ) Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι: $xf(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{(\lambda-1)x^2}+1,\ x\in R$$

α) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να ισχύει $\lambda<1$

β) Να υπολογίσετε το λ, αν το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

γ) Για την τιμή του λ, που βρήκατε, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Είναι η συνάρτηση άρτια;

14. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2+ax+1,\ \ a\in R$$

α) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν η f να είναι περιττή

β) ι) Αν η f είναι άρτια, τότε να υπολογίσετε το α

ιι) Για την τιμή του α που βρήκατε, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

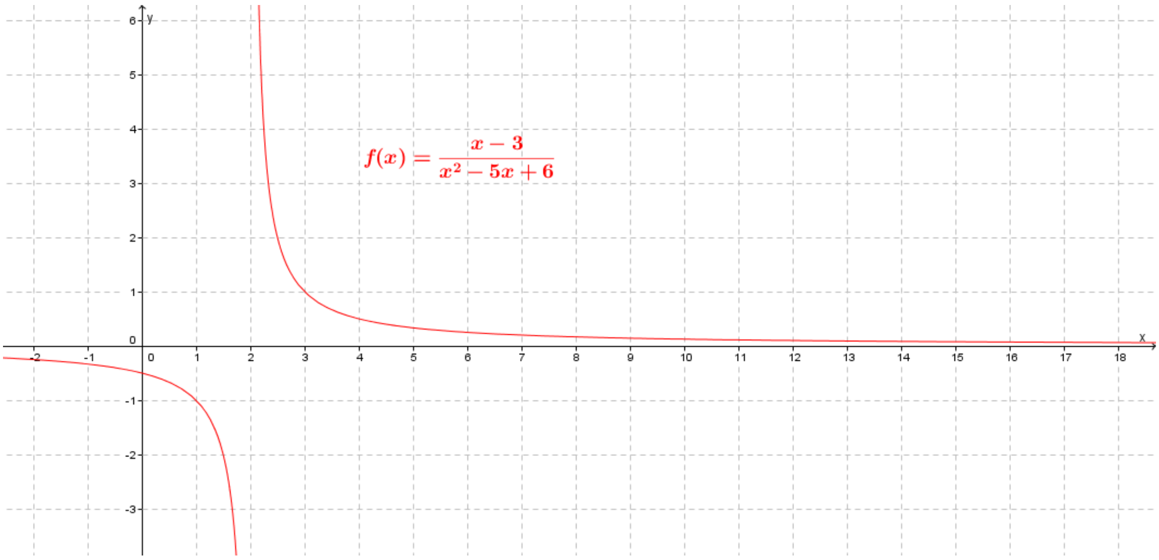
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της στο διάστημα $(2, 3)$

δ) Να λύσετε στο πεδίο ορισμού της την εξίσωση: $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=1.$

(Ακολουθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης)



16. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $3f(x-1)=5x+\alpha$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(3,7)

β) Να βρείτε τον τύπο της f (x)

17. Δίνεται η συνάρτηση f με πραγματικές τιμές και πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών, ώστε: $f(x\cdot\psi)=f(x)+f(\psi)$.

Να αποδείξετε ότι: $i)\ f(1)=0 \qquad ii)\ f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x) \qquad iii)\ f\left(x^{\nu}\right)=\nu f(x)$

18. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=|x|-4 \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x)=4-|x|$$

19. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = -3x^2$$
$$g(x) = -3x^2 + 6x - 5$$

Στη συνέχεια να βρείτε τη μονοτονία, τα ακρότατα και τους άξονες συμμετρίας τους.

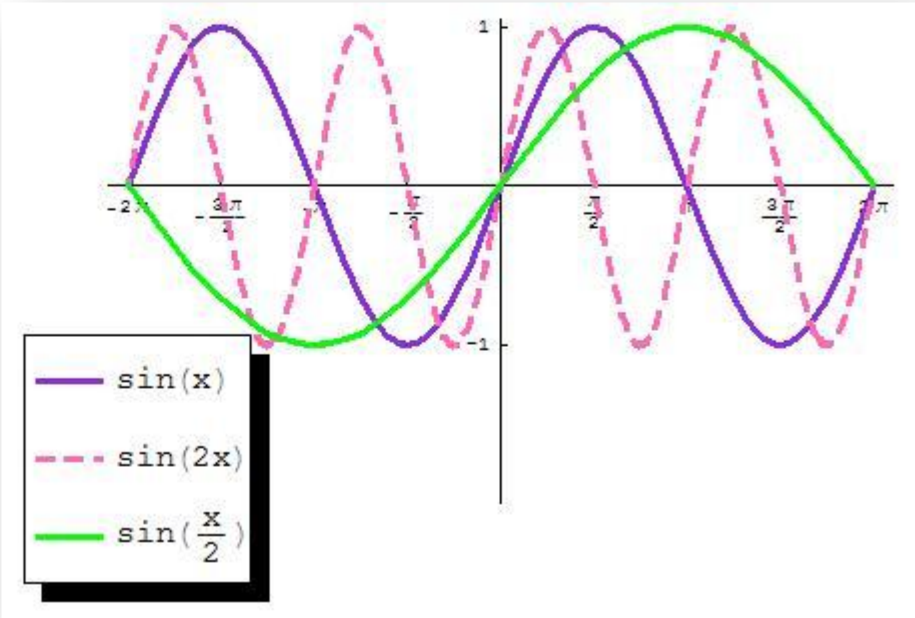
Να ελέγξετε αν οι δύο συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

20. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$\alpha)\ \varepsilon(x) = x, \qquad \beta)\ f(x) = |x|, \qquad \gamma)\ g(x) = |x-2|, \qquad \delta)\ h(x) = |x+2|,$

$\varepsilon)\ k(x) = |x-2| + 1, \qquad \zeta)\ \varphi(x) = -k(x)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: Τριγωνομετρία



3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας – Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες – Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

   $i)\ \dfrac{23\pi}{6}\ rad\ ,\quad ii)\ \dfrac{17\pi}{4}\ ,\quad iii)\ \dfrac{49\pi}{6}\ ,\quad iv) -\dfrac{17\pi}{3}\ ,\quad v)\ \dfrac{43\pi}{3}\ ,\quad vi)\ 2850°,\quad vii) -1920°$

2. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

   $i)\ A = \varepsilon\varphi 140°\, \eta\mu 250°\, \sigma\upsilon\nu 300°$ $\qquad ii)\ B = \eta\mu 38° - \varepsilon\varphi 100° - \sigma\upsilon\nu 250°$

3. Αν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\sigma\varphi x > \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

4. Αν $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών:

   $i)\ \eta\mu(x+y)$ $\qquad ii)\ \sigma\upsilon\nu(x-y)$

5. Να αποδείξετε ότι:

   $i)\ |3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu y| \le 5$ $\qquad ii)\ \eta\mu x \cdot \eta\mu y - 1 \le \eta\mu y - \eta\mu x$

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = \frac{\pi}{2}\right)$, με ΒΓ = x (σε cm) και $\hat{B} = \frac{\pi}{8}$.

   Αν ΑΗ και ΑΜ είναι αντίστοιχα το ύψος και η διάμεσος του τριγώνου, να βρείτε:

   α) Τη γωνία $A\widehat{M}H$

   β) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΗ και ΗΜ συναρτήσει του x

   γ) το $\eta\mu\frac{\pi}{8}$ και το $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$

7. α) Να υπολογίσετε το ύψος h ενός κατακόρυφου δένδρου, το οποίο φαίνεται υπό γνωστές γωνίες φ και ω, από δύο συγκεκριμένα σημεία Α και Β του (οριζόντιου) εδάφους

   β) Να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα, αν $\varphi = 30°$, $\omega = 45°$ και $AB = 20m$

8. Αν $\eta\mu x = \frac{12}{15}$ με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2\varepsilon\varphi x\ -\ 3\sigma\upsilon\nu x\ +\ 2\sigma\varphi x}{5\eta\mu x}$$

9. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$B = \frac{5\eta\mu x - 10\,\sigma\upsilon\nu x}{2\varepsilon\varphi x\ -\ \frac{1}{2}}$$

10. Αν $\varepsilon\varphi x = -2$ με $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$\varGamma = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\varphi x}$$

11. Αν $\varepsilon\varphi^2 x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 5$ με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$\varDelta = 3\eta\mu x - 6\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi x$$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i)\quad A=\frac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\ \sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu(\pi+\theta)\ \sigma\upsilon\nu(-\theta)\ \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$ii)\quad B=\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{-17\pi}{3}\right)-2\eta\mu\frac{13\pi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-23\pi}{4}\right)\ \varepsilon\varphi\left(\frac{37\pi}{6}\right)}$$

$$iii)\quad \Gamma=\frac{\eta\mu135^\circ\ \sigma\upsilon\nu120^\circ+\sigma\upsilon\nu135^\circ\ \sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\varepsilon\varphi(-120^\circ)+\varepsilon\varphi135^\circ}$$

$$iv)\quad \Delta=\frac{\eta\mu\frac{3\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\pi+\varepsilon\varphi\frac{2\pi}{3}}{\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{4}-\sigma\varphi\frac{5\pi}{4}+\eta\mu\frac{17\pi}{2}}$$

13. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$i)\quad \eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\beta\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$$

$$ii)\quad \frac{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha+1}{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha-1}=\frac{\eta\mu\alpha+1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$iii)\quad \frac{\eta\mu\alpha}{1-\eta\mu\alpha\ \sigma\varphi\alpha}-\frac{\eta\mu\alpha}{1+\eta\mu\alpha\ \sigma\varphi\alpha}=\frac{2}{\varepsilon\varphi\alpha}$$

$$iv)\quad \frac{1+\varepsilon\varphi^\nu\alpha}{1+\sigma\varphi^\nu\alpha}=\left(\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1+\sigma\varphi\alpha}\right)^\nu,\ \ \nu\in N$$

$v)$ $A\nu$ $\varepsilon\varphi^2\alpha=1+2\varepsilon\varphi^2\beta$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\beta=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

14. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$i)\quad \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{1+2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}\qquad ii)\quad \frac{1}{\eta\mu\alpha}-\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\sigma\varphi\alpha$$

15. Να αποδείξετε ότι:

$i)$ $2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-1\leq 0$ $\qquad$ $ii)$ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\leq\eta\mu^2\beta+2\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$

16. Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$i)$ $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x-2\geq 0$ $\qquad$ $ii)$ $\sigma\varphi x>\sigma\upsilon\nu x$

17. Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}}{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

18. Αν $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}=\sqrt{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}$$

19. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\eta\mu^4x+4\sigma\upsilon\nu^2x}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^4x+4\eta\mu^2x}=3$

20. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

$i)\ \sigma\upsilon\nu^2 A + \eta\mu^2(B+\Gamma) = 1$

$ii)\ \varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2} = 1$

$iii)\ \eta\mu\frac{A+B-\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu\Gamma = 0$

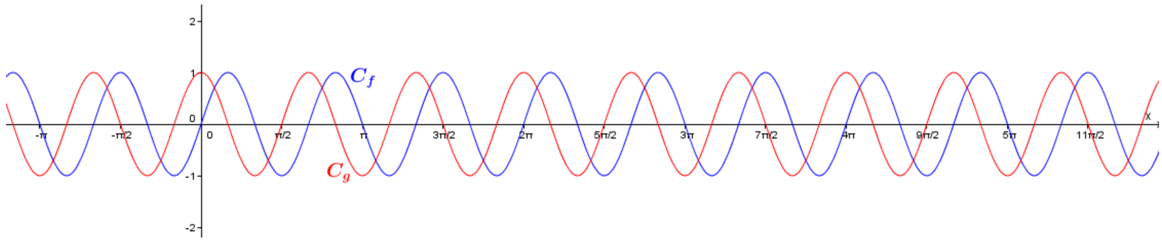
21. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot x - \eta\mu\alpha\cdot y = 3 \\ \eta\mu\alpha\cdot x + \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot y = 4 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in R$ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)

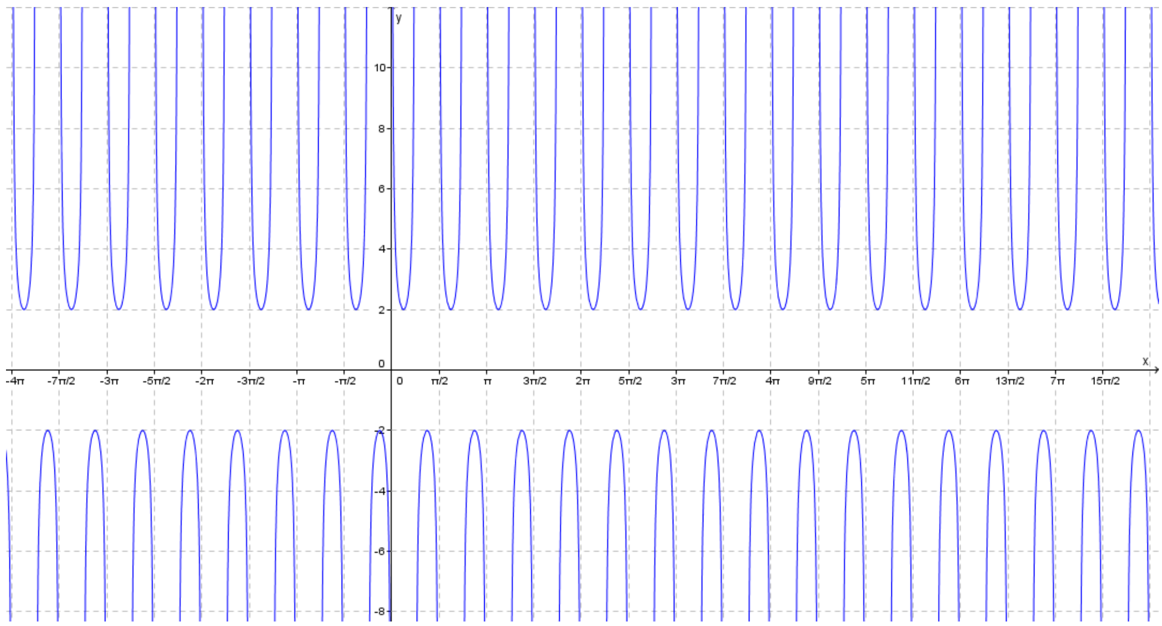
β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = x_0^2 + y_0^2$

3.2 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

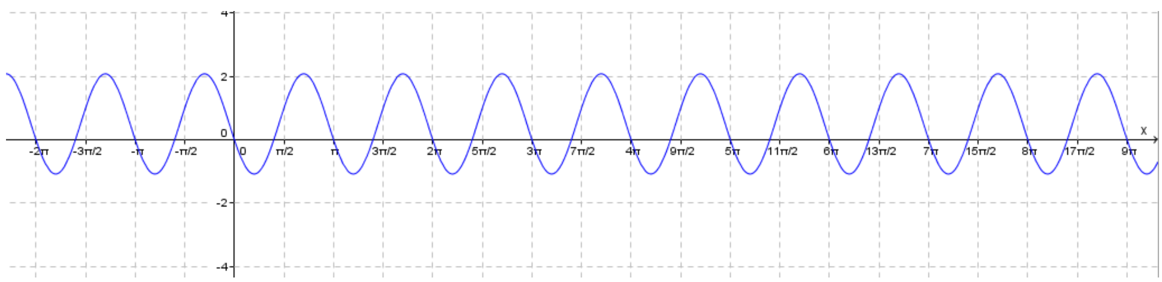
1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = ημ3x$ και $g(x) = συν3x$ είναι περιοδικές με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$



2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = εφ2x + σφ2x$ είναι περιοδική και μία περίοδός της είναι $T = \pi$



3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημ^2x - 3\,ημx\,συνx$ είναι περιοδική με περίοδο 2π



4. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων σε διάστημα μιας περιόδου:

   Α) $f(x) = 3\eta\mu x$ Β) $f(x) = -2\eta\mu x$ Γ) $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$ Δ) $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$

5. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων σε διάστημα μιας περιόδου:

   Α) $f(x) = 1 + 2\eta\mu x$ Β) $f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu x$ Γ) $f(x) = 2\eta\mu 2x + 1$

6. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων σε διάστημα μιας περιόδου:

   Α) $f(x) = \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ Γ) $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

   Β) $f(x) = |\sigma\varphi x|$ Δ) $f(x) = |5\eta\mu x| + 1$

7. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

   i) α) $f(x) = 2\eta\mu x$, β) $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, γ) $h(x) = g(x) + 2$

   ii) α) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, β) $g(x) = f(x) - 1$, γ) $h(x) = |g(x)|$

8. Να βρεθούν η μέγιστη τιμή, η ελάχιστη τιμή και η περίοδος των συναρτήσεων:

   Α) $f(x) = \frac{1}{3}\eta\mu\sqrt{2}x$ Β) $f(x) = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(-4x)$ Γ) $f(x) = -2\varepsilon\varphi 5x$

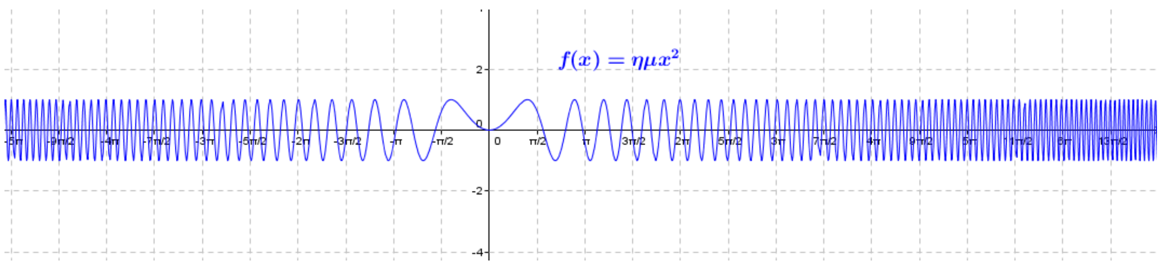
   Δ) $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x - 7$ Ε) $f(x) = |5\sigma\upsilon\nu x| + 1$

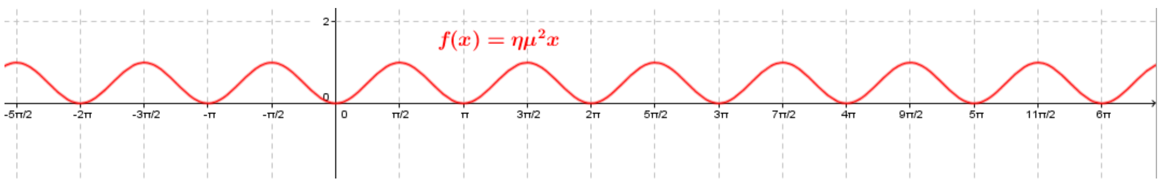
9. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

   Α) $f(x) = |\eta\mu^3 x| + 1$ Β) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x)}{\sigma\upsilon\nu x}$ Γ) $f(x) = \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}$

   Δ) $f(x) = \eta\mu x^2$ Ε) $f(x) = \eta\mu^2 x$

   (Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των δύο τελευταίων συναρτήσεων)





10. Να βρείτε πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρουν οι συναρτήσεις:

   Α) $f(x) = \sigma\upsilon\nu\frac{2x\pi}{5}$, $x \in Z$ Β) $f(x) = \varepsilon\varphi\frac{x\pi}{3}$, $x \in Z$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa \cdot \eta\mu x + 3,\ \kappa \in R$

α) Να βρεθεί η τιμή του κ, αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (δηλαδή η C_f) διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$

β) Στη συνέχεια να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της

12. Ένα σώμα είναι δεμένο στο άνω άκρο ελατηρίου και ταλαντώνεται κατακόρυφα. Το ύψος h (σε cm) του σώματος από το έδαφος συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = \kappa \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{3} + 6$

i) Να βρεθεί η περίοδος ταλάντωσης του σώματος

ii) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού κ, αν είναι γνωστό ότι τη χρονική στιγμή 1sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 21cm από το έδαφος

iii) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση του σώματος από το έδαφος

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa + \rho \cdot \eta\mu 2x$, $\rho > 0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$ και έχει μέγιστη τιμή 2

i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

ii) Να γίνει η γραφική της παράσταση

3.3 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $2\eta\mu x - 2 = 0$

   Β) $2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} = 0$

   Γ) $\varepsilon\varphi x = 1$

   Δ) $\sigma\varphi x = \sqrt{3}$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$

   Β) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

   Γ) $3\varepsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$

   Δ) $1 + \sigma\varphi x = 0$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $\eta\mu 2x = 1$

   Β) $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1$

   Γ) $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

   Δ) $\sigma\varphi\frac{x}{4} - 2 = -3$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Β) $2\sigma\upsilon\nu\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

   Γ) $\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -1$

   Δ) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο διάστημα $[0, 2\pi]$:

   Α) $\eta\mu 2x = \frac{1}{2}$

   Β) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

   Γ) $\varepsilon\varphi\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ x \in [0, \pi]$

   Β) $\sigma\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

7. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

   Β) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$

   Γ) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2x$

   Δ) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

   Ε) $\eta\mu(x - \pi) + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

   Ζ) $\varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi 2x$

   Η) $\varepsilon\varphi 2x = \sigma\varphi 4x$

   Θ) $\varepsilon\varphi 2x\ \varepsilon\varphi 3x = 1$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$

   Β) $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$

   Γ) $2\sigma\upsilon\nu^2 x = 3\eta\mu x$

   Δ) $\varepsilon\varphi^2 x - \left(\sqrt{3} + 1\right)\varepsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$

   Ε) $-2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x-\sqrt{2})=0$

   Β) $2\eta\mu x\ \varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sqrt{3}\,\eta\mu x+\sqrt{3}=0$

   Γ) $2\eta\mu^2 x+2\eta\mu x-\sqrt{2}\,\eta\mu x-\sqrt{2}=0$

   Δ) $\sigma\varphi x+\eta\mu x=1+\sigma\varphi x\ \eta\mu x$

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=2\sqrt{2}$

   Β) $2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x=\varepsilon\varphi x\,,\ \ x\in[0,\pi]$

   Γ) $\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 2x=1$

   Δ) $\sigma\upsilon\nu^2 2x+\eta\mu^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

   Α) $\eta\mu|x|+\sigma\upsilon\nu x=0$ Β) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}\ \eta\mu x\right)=1$ Γ) $\left(\sqrt{2}\,\eta\mu x+1\right)^2+|\varepsilon\varphi x+1|=0$

12. (*) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

   Α) $1-2\eta\mu x>0$ Β) $\varepsilon\varphi x-1>0$ Γ) $|\sigma\upsilon\nu x|>\frac{1}{2}$

   Δ) $4\sigma\upsilon\nu^2 x-3\leq 0$ Ε) $2\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+1<0\,,\ x\in(0,2\pi)$

13. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu x+1=0, x\in[0,\pi]$

14. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu x=1=0,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

15. Δίνεται η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x=1$

   α) Να βρείτε πότε ορίζεται η εξίσωση

   β) Να λύσετε την εξίσωση όταν $x\in[0,3\pi)$

16. Δίνεται η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+1-3\,\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x=0$. Αν $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\alpha$, τότε:

   α) Να εκφράσετε την εξίσωση ως συνάρτηση του α

   β) Να υπολογίσετε το α

17. Να βρείτε τη γωνία x ενός τριγώνου ΑΒΓ, για την οποία έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x=0$. Τι είδους τρίγωνο έχετε;

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3-2\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

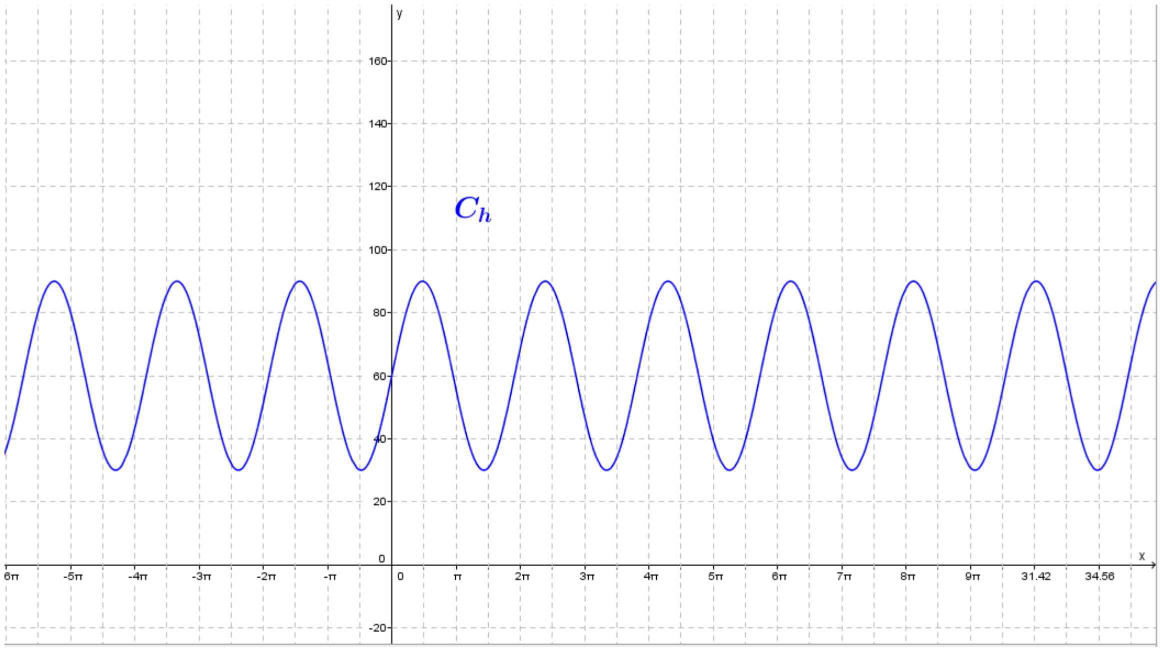
   i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

   ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x παίρνει τη μέγιστη τιμή της η συνάρτηση

19. Να βρείτε το $x\in[0,2\pi]$, στο οποίο η συνάρτηση $f(x)=2-4\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή

20. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου και το ύψος του h (σε cm) σε συνάρτηση με το χρόνο t (σε sec), δίνεται από τον τύπο:

$$h(t) = 30\,\eta\mu\frac{\pi\, t}{3} + 60$$



i) Να βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να εκτελέσει το σώμα μία πλήρη ταλάντωση

ii) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος του σώματος

iii) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή $t \in [0, 6]$ το σώμα φθάνει στο μέγιστο ύψος

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right)$, $x \in (0, 2\pi)$

Να βρείτε σε ποια σημεία x_0 παρουσιάζει ελάχιστο και σε ποια μέγιστο

22. Ένα σώμα είναι κρεμασμένο στο άκρο ενός ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο ταβάνι ενός δωματίου. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\, sec$, τραβάμε το σώμα προς τα κάτω σε ύψος $\frac{1}{2}m$ από το πάτωμα και το αφήνουμε να ταλαντώνεται. Το ύψος του σώματος h (σε m) από το πάτωμα, τη χρονική στιγμή t (σε sec) από την έναρξη του πειράματος, περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = \kappa \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi\, t}{6} + \lambda\,,\ \text{όπου}\ \kappa, \lambda \in R$$

α) Να βρείτε τις παραμέτρους κ, λ, αν 2sec μετά την εκκίνηση της ταλάντωσης το σώμα βρίσκεται σε ύψος $\frac{3}{4}m$ από το πάτωμα

β) Να βρείτε το χρόνο που απαιτείται ώστε να εκτελέσει το σώμα μία πλήρη ταλάντωση

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απομάκρυνση του σώματος από το πάτωμα

δ) Να βρείτε σε ποιο ύψος από το πάτωμα βρίσκεται το σώμα 5sec μετά την εκκίνηση

23. Το βάθος του νερού στη γέφυρα του Ευρίπου κατά τη διάρκεια της ημέρας, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 20 + 4\,συν\frac{\pi t}{3}$, $0 \le t \le 24$ (σε ώρες)

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης

β) Να βρείτε ποιο είναι το μέγιστο και το ελάχιστο βάθος του νερού

γ) Να βρείτε ποια ώρα της ημέρας το βάθος του νερού είναι 18 μέτρα

δ) Αν το ύψος της γέφυρας είναι 30 μέτρα από τον πυθμένα, να ελέγξετε αν ένα σκάφος ύψους 8 μέτρων (από την επιφάνεια του νερού) μπορεί να περάσει κάτω από τη γέφυρα στις 12 το πρωί

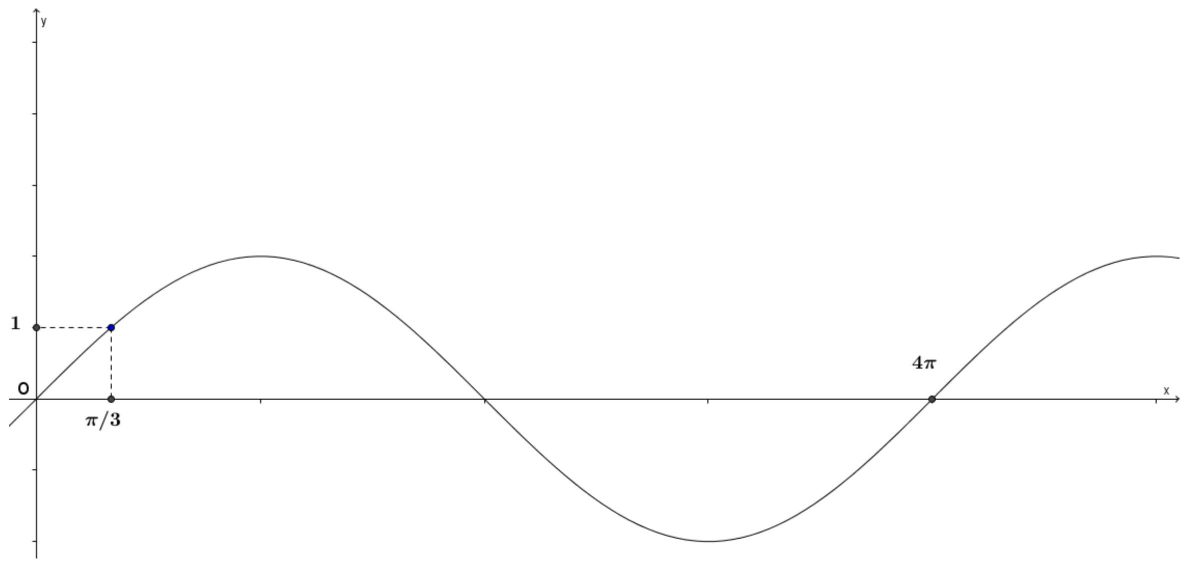
24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot ημ\left(\frac{2x}{3}\right) + \beta$, όπου $x \in R$, $\beta \in R$ και $\alpha > 0$

α) Αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 3 και η C_f τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο 1, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου και στο ίδιο διάστημα να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα x΄x

25. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \beta + \rho \cdot ημ(\alpha x)$$



Να βρείτε:

α) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

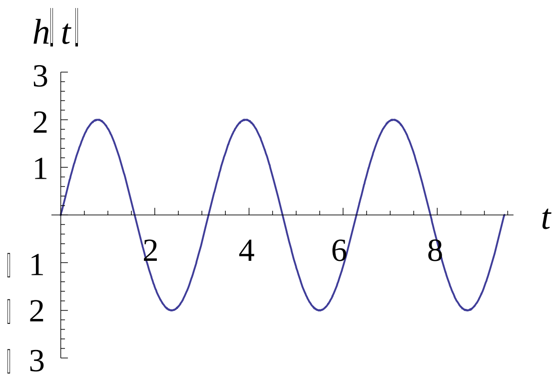
β) Τις τιμές του x, για τις οποίες έχουμε το μέγιστο και το ελάχιστο

γ) Το πλάτος της ταλάντωσης

26. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση	Διάστημα μίας περιόδου	Μονοτονία	Ακρότατα
$f(x) = 0{,}5\ \eta\mu 2x$			
$f(x) = -2\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$			
$f(x) = 2\ \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$			
$f(x) = \frac{1}{3}\ \sigma\varphi x$			

27. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μία συνάρτηση της μορφής $h(t) = \alpha\ \eta\mu(\kappa t)$, η οποία παριστάνει το ύψος $h\ (\sigma\varepsilon\ m)$ του νερού σε μια παλίρροια, σε συνάρτηση με το χρόνο $t\ (\sigma\varepsilon\ \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma)$, όπου το ύψος του νερού από το κατώτερο στο ανώτερο σημείο είναι 4m



Να βρείτε:

α) το ελάχιστο (min) και το μέγιστο (max) της συνάρτησης

β) την περίοδο της συνάρτησης

γ) ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $h(t) = 2\ \eta\mu(2t)$

δ) το σύνολο τιμών της συνάρτησης

ε) τη μονοτονία της σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

ζ) τη λύση της εξίσωσης $h(t) = max$

η) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την ευθεία $\psi = -1$

28. Σε ένα λούνα πάρκ υπάρχει ένας "μύλος", δηλαδή ένας περιστρεφόμενος δίσκος με ακτίνα 5m και κέντρο που απέχει από το έδαφος 15m. Στην περιφέρεια του δίσκου και σε ίσες αποστάσεις είναι τοποθετημένα 12 βαγόνια Α, Β, Γ, … και πριν κινηθεί ο τροχός το βαγόνι Α (κινούμενο ανοδικά) βρίσκεται σε απόσταση 15m από το έδαφος. Ο δίσκος εκτελεί μία πλήρη περιστροφή σε 12 sec. Να βρείτε:

α) Την απόσταση του βαγονιού Α από το έδαφος, μετά από: i) 1 sec, ii) 2 sec

β) Την απόσταση του βαγονιού Α από το έδαφος, μετά από t sec

γ) Το χρόνο που χρειάζεται για να φθάσει το βαγόνι Α,

i) στο υψηλότερο σημείο από το έδαφος

ii) στο χαμηλότερο σημείο από το έδαφος

για πρώτη φορά. Βρείτε επιπλέον τις διαδοχικές χρονικές στιγμές που συμβαίνουν τα παραπάνω

3.4 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

   i) $\eta\mu\frac{\pi}{10}\ \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{20}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{10}\ \eta\mu\frac{3\pi}{20}$

   ii) $\eta\mu 73°\ \sigma\upsilon\nu 13° - \sigma\upsilon\nu 73°\ \eta\mu 13°$

   iii) $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5}\ \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{20}+\eta\mu\frac{3\pi}{5}\ \eta\mu\frac{7\pi}{20}$

   iv) $\sigma\upsilon\nu 19°\ \sigma\upsilon\nu 26° - \eta\mu 19°\ \eta\mu 26°$

   v) $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{8}-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}}{1+\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{8}\ \varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}}$

   vi) $\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12}-x\right)}{1-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{12}-x\right)}$

   vii) $\dfrac{\sigma\varphi 75°\ \sigma\varphi 45° + 1}{\sigma\varphi 45° - \sigma\varphi 75°}$

2. Αν $\eta\mu\alpha=\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{5}{13}$, με $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(\alpha-\beta)$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

3. Αν $\eta\mu\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=-\frac{1}{3}$, με $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ και $\pi\le\beta\le\frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(\alpha-\beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$ και $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)$

4. Να αποδείξετε τις ισότητες:

   i) $\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\alpha$

   ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)-\eta\mu(\alpha-\beta)\ \eta\mu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

   iii) $\sigma\upsilon\nu(36°-\alpha)\ \sigma\upsilon\nu(36°+\alpha)+\sigma\upsilon\nu(54°+\alpha)\ \sigma\upsilon\nu(54°-\alpha)=\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

   iv) $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 2\alpha\cdot\varepsilon\varphi^2\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha$

5. Να αποδείξετε τις ισότητες:

   i) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\ \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

   ii) $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta$

   iii) $\frac{2\,\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}=\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta$

   iv) $\varepsilon\varphi(\beta-\gamma)+\varepsilon\varphi(\gamma-\alpha)+\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\varepsilon\varphi(\beta-\gamma)\cdot\varepsilon\varphi(\gamma-\alpha)\cdot\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)$

6. Να αποδείξετε τις ισότητες:

   i) $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}$

   ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}=\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$

   iii) $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}{2}$

   iv) $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)}+\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}=2$

   v) $\eta\mu(\alpha+\beta)\ \eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

7. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $0 < y < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\eta\mu(x+y) < \eta\mu x + \eta\mu y$

8. Αν οι γωνίες α και β είναι οξείες, τέτοιες ώστε $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{3}$,
να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους ισούται με $\frac{\pi}{4}$

9. Αν $\alpha + \beta = 225°$, να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma\varphi\alpha}{1+\sigma\varphi\alpha} \cdot \frac{\sigma\varphi\beta}{1+\sigma\varphi\beta} = \frac{1}{2}$

10. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, είναι $\hat{A} = 45°$. Να αποδείξετε ότι $(1+\sigma\varphi B)(1+\sigma\varphi \Gamma) = 2$
Στη συνέχεια να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο

11. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu A = 2\,\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma$, τότε είναι ισοσκελές

12. Αν Α, Β, Γ είναι γωνίες τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = 1$$

13. Αν Α, Β, Γ είναι γωνίες τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\varphi A\,\sigma\varphi B + \sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A = 1$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma\,\eta\mu A} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu B} = 2$

γ) $(\sigma\varphi A - \sigma\varphi B)\,\sigma\varphi(B-A) + (\sigma\varphi B - \sigma\varphi\Gamma)\,\sigma\varphi(\Gamma - B) + (\sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi A)\,\sigma\varphi(A-\Gamma) = 4$

δ) $\frac{\sigma\varphi A+\sigma\varphi B}{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B} + \frac{\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma} + \frac{\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi A}{\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi A} = 1$

14. Αν $\eta\mu x - \eta\mu y = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \beta$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu(x+y)$
και να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \leq 4$

15. α) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi(x-y) + \varepsilon\varphi(y-\omega) + \varepsilon\varphi(\omega - x) = \varepsilon\varphi(x-y)\,\varepsilon\varphi(y-\omega)\,\varepsilon\varphi(\omega-x)$$

16. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\gamma\,\varepsilon\varphi\alpha = 1$

ii) $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$

ii) $\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \;\; x \in [0, 2\pi]$

iii) $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x) + \eta\mu 3x - 1 = 0$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:
    i) $\eta\mu x + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x = 1$
    ii) $\eta\mu x + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$
    iii) $\eta\mu 3x + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu 3x = \sqrt{3}$
19. Οι αριθμοί $\varepsilon\varphi A, \varepsilon\varphi B, \varepsilon\varphi \Gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, όπου A, B, Γ είναι γωνίες ενός οξυγώνιου τριγώνου
    α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi \Gamma = 3$
    β) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu B = 2\,\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$
20. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\varepsilon\varphi 65°, \varepsilon\varphi 40°, -\varepsilon\varphi 25°$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου
21. Ένα άγαλμα ύψους 1,5 m είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα βάθρο ύψους 2 m. Ένα παιδί ύψους 1,75 m παρατηρεί το άγαλμα από κάποια απόσταση, βλέποντας το υπό γωνία ω.
    α) Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας ω, ως συνάρτηση της απόστασης του παιδιού από το άγαλμα
    β) Το παιδί βλέπει το άγαλμα υπό γωνία 45°. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές αποστάσεις από τις οποίες αυτό είναι εφικτό και να τις υπολογίσετε

3.5 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α

1. Αν $ημα = \frac{1}{2}$, να βρείτε το $ημ2α$
2. Αν $συν2α = \frac{1}{2}$, με $α \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ να υπολογίσετε το $ημα$
3. Αν $συνα = \frac{7}{13}$, με $α \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να υπολογίσετε το $συν2α$ και $το\ συν\frac{α}{2}$
4. Αν $εφα = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $ημ2α,\ συν2α$ και $εφ4α$
5. Αν $3συν^2x + 5συνx - 2 = 0$ και $ημx > 0$, να υπολογίσετε το $ημ2x$ και το $συν2x$
6. Να αποδείξετε ότι:

   i) $\frac{1}{συν80°} - \frac{\sqrt{3}}{ημ80°} = 4$

   ii) $ημ10°\ συν20°\ συν40° = \frac{1}{8}$

   iii) $\frac{1 - συν2α + ημ2α}{1 + συν2α + ημ2α} = εφα$

   iv) $ημ^3α\ συνα + συν^3α\ ημα = \frac{1}{2}ημ2α$
7. Να αποδείξετε ότι:

   i) $8ημ^4α = 3 - 4συν2α + συν4α$

   ii) $συν\frac{\pi}{15}συν\frac{2\pi}{15}συν\frac{3\pi}{15}συν\frac{4\pi}{15}συν\frac{5\pi}{15}συν\frac{6\pi}{15}συν\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$

   iii) $εφ(45° + α) - εφ(45° - α) = 2εφ2α$

   iv) $συν^2(α + β) + συν^2(α - β) - συν2α \cdot συν2β = 1$
8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $συν2x - ημx - 1 = 0$

   ii) $2 - συν^2x = 4ημ^2x$

   iii) $συν^2x + ημ2x - ημ^2x = \sqrt{2}\,ημ\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

   iv) $ημx \cdot εφ\frac{x}{2} = συνx$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $συν2x = \sqrt{2}(συν^3x + ημ^3x - ημx\ συν^2x - συνx\ ημ^2x)$, $x \in (0, \pi)$

   ii) $\left(\sqrt{2} + 1\right) ημ^2x + \left(\sqrt{2} - 1\right) συν^2x + ημ2x = \sqrt{2}$

   iii) $συν^3x\ ημx - ημ^3x\ συνx = \frac{1}{4}$

   iv) $σφx + εφx = 8συν2x$

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \eta\mu 2x = 0$ είναι αδύνατη

11. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $1 - \eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu A$, να αποδείξετε ότι $B + \Gamma = 120°$

12. Αν μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\varepsilon\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma - B)}{\eta\mu A + \eta\mu(\Gamma - B)}$,

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

13. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 4\alpha = 8\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^3\alpha - 4\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

ii) $1 + \eta\mu 2\alpha = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2$

iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}$

iv) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$

14. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

β) $\frac{\eta\mu^3\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 3$

15. Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta)$

β) $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\eta\mu\alpha$

16. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1 - \eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}$

ii) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

17. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$

ii) $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

iii) $\frac{2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 4\alpha}{2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha} = \varepsilon\varphi^2\alpha$

18. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\frac{\eta\mu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

19. α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1$

β) Για τις γωνίες $\theta, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\theta - \alpha)} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\theta + \alpha)}$

Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{7}{4}$

ii) $\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x=1$

iii) $\sigma\upsilon\nu 2x-3\sigma\upsilon\nu x=-2$

iv) $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-\eta\mu^2\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

21. Για τη γωνία α ισχύει ότι: $5\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha-14\,\sigma\upsilon\nu\alpha-7=0$

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει $\pi\leq\alpha\leq\frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\varepsilon\varphi 2\alpha$

(Πανελλαδικές εξετάσεις 2001)

22. Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 2x+4\eta\mu x)=(\sigma\upsilon\nu 2x+4\sigma\upsilon\nu x+1)\eta\mu x$$

και να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu 2x+4\sigma\upsilon\nu x+1=0$$

(Πανελλαδικές εξετάσεις 2003)

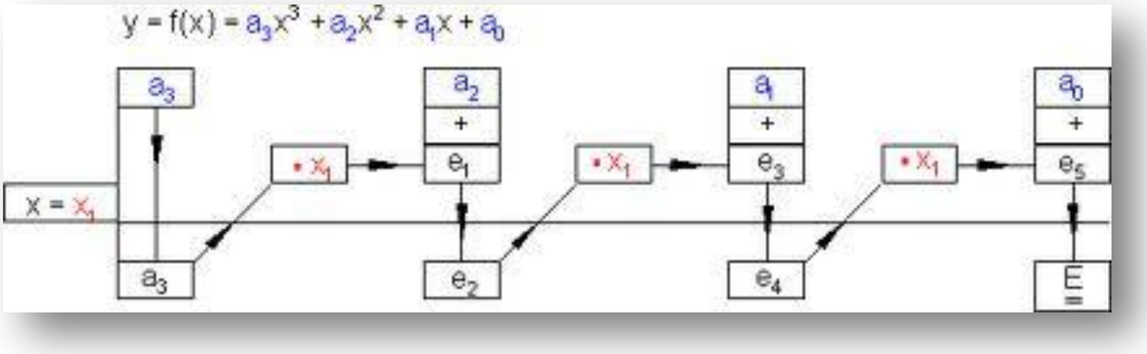
23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu 2x\ -\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\eta\mu 4x}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\eta\mu 2x\ -\sigma\upsilon\nu 2x}$

β) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)+1}{f(x)[1+\sigma\upsilon\nu 2x]+1}=\varepsilon\varphi x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}: Πολυώνυμο – Πολυωνυμικές Εξισώσεις



4.1 Πολυώνυμα

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$
   Να βρεθεί η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 0,\ \pm1,\ \pm2$
2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 1)x^3 + (\alpha + \beta - 2)x^2 + (\gamma - 2)x + \alpha^2 - 1$
   Να βρεθεί για ποιες τιμές των παραμέτρων το πολυώνυμο είναι:
   i) $3^{ου}$ βαθμού ii) $1^{ου}$ βαθμού
3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x^3 + 2(\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2 - (\lambda^2 - 2\lambda)x$
   Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ, έτσι ώστε το πολυώνυμο να είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Υπάρχουν τιμές του λ, για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι σταθερό και μη μηδενικό;
4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^3 - 4\kappa)x^3 + (\kappa + 2)x^2 - (\kappa - 2)x - \kappa$
   Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ
5. Δίνονται τα πολυώνυμα
   $P(x) = (\alpha - 2\beta)x^2 + 3x - \alpha + 3\beta - 2$ και $Q(x) = x^2 + (4\beta - \alpha)x + \gamma$
   Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ έτσι ώστε να ισχύει $P(x) = Q(x)$
6. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ και $Q(x) = (\alpha x + \beta)(x - 1)^3$
   Να βρεθούν οι τιμές *των* α, β έτσι ώστε να ισχύει $P(x) = Q(x)$
7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 2$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ αν $P(-1) = 2$ και μία ρίζα του πολυωνύμου είναι το -2
8. i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa^2 x^2 - \kappa x + 1$
   δεν μπορεί να έχει ρίζα το 1
   ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$
   δεν μπορεί να έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$
9. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο έχει ρίζα το 0, τότε και μόνο τότε όταν ο σταθερός του όρος είναι $\alpha_0 = 0$
10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 9x^{11} - 7x^5 + \alpha x^2 + \alpha x + 2$
    α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα το -1, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου α
    β) Να βρεθεί το α, έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα και το 1
11. Να βρεθεί ο $\alpha \in R$, έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x + 27$ να μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
12. Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με το πολυώνυμο
    $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

13. Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$, τέτοιο ώστε $(x^2+1)f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$

14. i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί Α και Β, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{2x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}, \qquad x \neq -2 \text{ και } x \neq 3$$

ii) Να αναλύσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ σε άθροισμα δύο κλασμάτων με παρονομαστές πρωτοβάθμιους παράγοντες

15. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί *Α* και *Β*, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}, \qquad x \neq 3$$

16. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί *Α, Β, Γ* έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}, \qquad x \neq -1$$

17. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού, ώστε να ισχύουν:

$$P(0) = 0 \text{ και } P(x) - P(x-1) = x^2, \text{ για κάθε } x \in R$$

18. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ τα οποία ικανοποιούν τη σχέση:

$$f^2(x) - xg^2(x) - xp^2(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Να αποδείξετε ότι και τα τρία πολυώνυμα είναι μηδενικά

19. Δίνονται δύο πολυώνυμα $p(x), q(x)$ τα οποία δεν έχουν κοινή ρίζα. Να αποδείξετε ότι και τα πολυώνυμα $f(x) = p(x) + q(x)$ και $g(x) = p(x) \cdot q(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα

20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + \lambda x + 1$, $\lambda \in R$

Να βρεθεί η τιμή του λ, έτσι ώστε $P(x+1) = P(x)$, για κάθε $x \in R$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-2)x^2 + (\beta-4)x + \gamma - 6}{x^2+2x+3}$, με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha + \beta + \gamma = 30$.

Να προσδιορίσετε τα *α, β, γ* ώστε η συνάρτηση είναι το σταθερό πολυώνυμο για κάθε $x \in R$

22. Δίνονται τα πολυώνυμα $p(x) = \alpha x^3 + 4x^2 + \gamma x + \delta$ και $q(x) = 2x^3 + \beta x^2 + 3x + \delta$.

Να βρείτε τις τιμές που πρέπει να πάρουν οι πραγματικοί αριθμοί *α, β, γ, δ* έτσι ώστε το άθροισμα των δύο πολυωνύμων να είναι:

i) 3ου βαθμού

ii) το πολύ 3ου βαθμού

iii) μηδενικού βαθμού

iv) μηδενικό πολυώνυμο

23. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^\nu + x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \cdots + x^2 + x - 9$

και $Q(x) = x^{\nu+1} - 10x + 9$, όπου $\nu \in N$, $\nu > 2$

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα και του πολυωνύμου $Q(x)$

4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:
   i) $(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1) : (x^3 - 2x + 1)$
   ii) $(x^6 + 2x^5 - x^2 - 4x) : (x^4 - x + 1)$
   iii) $(6x^2 - 3x + 10) : (2x^2 - x + 1)$
2. α) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^3 - x + 5) : (x^2 - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης
   β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - x + 5}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$
   Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί και να γραφεί στη μορφή:
   $$f(x) = x + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}$$
3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των παρακάτω διαιρέσεων:
   i) $(2x^3 - 5x^2 + 6x - 1) : (x - 1)$
   ii) $(x^6 + 1) : (x + 1)$
   iii) $(x^4 - 3a^2x^2 + 5a^4) : (x + 2a)$
4. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
   i) $(x^{2014} - 2x^{20} + x^3 + 12) : (x + 1)$
   ii) $[(x - 2)^9 + 3(3x - 5)^3 + x^2 - 3] : (x - 2)$
   iii) $(x^3 + x^2 - 1) : (2x + 1)$
   iv) $(3x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (3x - 1)$
5. Αν $P(x) = \kappa^2 x^3 + x^2 + (\kappa + 1)x + \kappa^2 + 4$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ, έτσι ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ να ισούται με 3
6. Αν $P(x) = \alpha x^4 + x^3 - (a^3 + 1)x^2 - a^2 x + 4$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε η διαίρεση $P(x) : (x + 1)$ να είναι τέλεια
7. Αν $P(x) = x^3 + (a - 1)x^2 - 7x + 6a$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το $(x - 1)$
8. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $(x^2 + 1)$, δίνει πηλίκο $(3x - 1)$ και υπόλοιπο $(2x + 5)$

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τις τιμές των α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το $(x-2)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $(x-1)$ ισούται με 8
10. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^4 + x^3 + \beta x^2 - x - 2$ να έχει παράγοντες το $(x-1)$ και το $(x-2)$
11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο διαιρείται με το $x^2 - x - 6$
12. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$
13. i) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + 3x^2 + \beta x + 2$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το τριώνυμο $(x^2 - 2x + 1)$

    ii) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο να διαιρείται με το $(x-2)^2$
14. Αν η διαίρεση $(x^3 + \alpha x + \beta) : (x - \rho)^2$ είναι τέλεια, να αποδείξετε ότι οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν τη σχέση $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0$
15. i) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \alpha x - \beta$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το $(x^2 + 1)$

    ii) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο να διαιρείται με το $(x^2 - x + 1)$
16. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$ διαιρείται με το $(x+1)^3$
17. i) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-5)$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(2x-3)$ έχει παράγοντα το $(x-4)$

    ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $(2x-3)$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(2x+3)$ έχει παράγοντα το $(4x+3)$
18. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $(x-2)$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με το $(x+3)$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x - 6)$
19. Αν οι διαιρέσεις του πολυωνύμου $P(x)$ με τα πολυώνυμα $(x - \alpha)$ και $(x - \beta)$ με $\alpha \neq \beta$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο υ, να αποδείξετε ότι και η διαίρεση $P(x) : [(x-\alpha)(x-\beta)]$ δίνει υπόλοιπο υ
20. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το $(x^2 - \rho^2)$ είναι: $\upsilon(x) = \frac{f(\rho) - f(-\rho)}{2\rho} x + \frac{f(\rho) + f(-\rho)}{2}$

21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\nu + 1)x^{\nu} - \nu x^{\nu+1} + \alpha$, όπου $\nu \in N,\ \alpha \in R$.
Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο διαιρείται με το $(x-1)$, τότε διαιρείται και με το $(x-1)^2$
22. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-\alpha)(x-\beta)$, όπου $\alpha \neq \beta$
23. i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^9 + 1$ διαιρείται με το 8
ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $17^{14} - 1$ διαιρείται με το 4
24. Να κάνετε τη διαίρεση $(x^4 + 3x^3 - 7x^2 + \kappa x + \lambda) : (x^2 - 3x + 2)$
Να προσδιορίσετε τις τιμές των κ, λ έτσι ώστε η διαίρεση να δίνει υπόλοιπο $\upsilon(x) = x + 1$
25. Να κάνετε τη διαίρεση $(x^4 - 3x^3 + \kappa x + \lambda) : (x-2)^2$
Να προσδιορίσετε τις τιμές των κ, λ έτσι ώστε η διαίρεση να είναι τέλεια
26. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού ισχύουν:
$P(0) = \frac{1}{6}$ και $P(x) - P(x-1) = x^2$ για κάθε $x \in R$
α) Να βρείτε το πολυώνυμο
β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $P(x) + \frac{5}{6} = 0$ έχει ακέραιες ρίζες και αν έχει να βρεθούν
27. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\alpha+2)\,x^2 + 2(\alpha+2)\,x - \beta$, όπου $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα το 2
α) Να αποδείξετε ότι $\beta = 8$
β) Να βρείτε τις τιμές του α, έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες
γ) Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $x_1,\ 2,\ x_2$ αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου
28. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{10} + \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$, το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 1$ αφήνει υπόλοιπο $\upsilon(x) = 9x + 19$
Να αποδείξετε ότι τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου
29. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in R$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta + 1 = 0$
β) Να βρείτε τα α, β
γ) Να αποδείξετε ότι $P(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$
30. α) Να αποδείξετε ότι $1 - \sigma\upsilon\nu 4\theta = 8\,\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta$
β) Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το $(x - \eta\mu^2\theta)$ δίνει υπόλοιπο $\sigma\upsilon\nu^2\theta$, ενώ διαιρούμενο με το $(x - \sigma\upsilon\nu^2\theta)$ δίνει υπόλοιπο $\eta\mu^2\theta$, όπου $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ γνωστό τόξο

β$_1$) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)$, όπου $Q(x) = 8x^2 - 8x + 1 - \sigma\upsilon\nu 4\theta$

β$_2$) Αν το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $Q(x)$ του προηγούμενου ερωτήματος είναι $\pi(x)$ και ισχύει ότι $\pi(1) = 2P(1) \neq 0$, τότε να υπολογίσετε το τόξο θ

4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $x^6 = 4x^2$

   ii) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

   iii) $x^5 + 2x^4 + 3x + 6 = 0$

   iv) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$

   v) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

   vi) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x = 0$

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

   i) $2x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$

   ii) $5x^{2\nu} + 9\kappa x - 1 = 0,\ \kappa \in Z$

   iii) $8\lambda\, x^{2\nu} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0,\ \kappa, \lambda \in Z$

   iv) $x^\nu + 2\kappa x + 2 = 0,\ \kappa \in Z$ και $\nu \in N - \{0,1\}$

3. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$

   Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε η εξίσωση να έχει το μεγαλύτερο δυνατόν πλήθος ακεραίων ριζών

4. Να βρείτε τον μη μηδενικό ακέραιο κ, έτσι ώστε η εξίσωση $x^3 - (\kappa + 1)x + 2\kappa = 0$ να δέχεται μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα

5. Αν η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\gamma = \alpha\beta$

6. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των κ, λ έτσι ώστε το πολυώνυμο

   $P(x) = x^5 + x^4 + \kappa x + \lambda$ να έχει διπλή ρίζα το -1.

   Στη συνέχεια να βρεθούν και οι υπόλοιπες ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$

7. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3\alpha\beta x + \alpha^3 - \beta$ έχει παράγοντα το $(x + \alpha - \beta)$. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -10x^3 - 2\kappa x^2 + 6\lambda x + \kappa^2 + \lambda^2$, με $\kappa, \lambda \in R$

   α) Να βρείτε τα κ, λ έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1

   β) Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\kappa - \lambda)x^3 + 2\kappa x^2 - 5x + 4$, με $\kappa, \lambda \in R$

   α) Να βρείτε τα κ, λ έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$

   β) Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

10. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακεραίους, τέτοιους ώστε ο κύβος του μεγαλύτερου να ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των κύβων των άλλων δύο

11. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

    $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$ με τον άξονα x΄x

12. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x - 4$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

    i) $x^3 + 2x - 3 \geq 0$

    ii) $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$

    iii) $(x+2)^3 \leq 8x^2 + 16x$

    iv) $x^6 > 64$

    v) $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

    vi) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

14. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(1,-2)$ και $B(2,4)$

    β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2$ σε σημεία, των οποίων οι τετμημένες αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

    γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των πολυωνυμικών συναρτήσεων C_f και C_g, με $g(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

    i) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

    ii) $x^6 - x^3 - 2 = 0$

    iii) $(2x-1)^2 - 8(2x-1) + 17 = 0$

    iv) $(x^2 - 6x + 8)^2 + 7(-x^2 + 6x - 8) + 10 = 0$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

    i) $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$

    ii) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

    iii) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

    i) $(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 1) = 20$

    ii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 120$

    iii) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

18. Μία δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει βάση x (σε m) και ύψος μικρότερο κατά 1m από την πλευρά της βάσης του.

    α) Να υπολογίσετε τον όγκο της δεξαμενής ως συνάρτηση του x

    β) Για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει χωρητικότητα 18.000 λίτρα

    γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της δεξαμενής ως συνάρτηση του x

    δ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του x, έτσι ώστε για την κατασκευή της δεξαμενής να απαιτηθούν το πολύ 16 m^2 λαμαρίνας

19. Το διάστημα $S(t)$ σε m που έχει διανύσει ένα κινητό, κινούμενο πάνω σε έναν άξονα, τη χρονική στιγμή t σε sec, δίνεται από τον τύπο:

$$S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 30t$$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τη χρονική στιγμή $t = 1\text{sec}$

β) Να βρείτε σε πόσο χρόνο το κινητό έχει διανύσει απόσταση 40m

γ) Θεωρούμε δύο τυχαίες χρονικές στιγμές t_1 και t_2, με $t_1 < t_2$

Να αποδείξετε ότι $S(t_1) < S(t_2)$

20. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in R$ και $Q(x) = x^2 + 1$

α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $P(x) : Q(x)$

β) Αν το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης είναι $\upsilon(x) = -5x + 10$, να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 8$

γ) Για τις τιμές των α και β που προέκυψαν από το προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 4x^3 + \alpha\, x^2 - 4x + 1$, όπου $\alpha \in R$

i) Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - \rho)$, τότε έχει ως παράγοντα και το $\left(x - \frac{1}{\rho}\right)$

ii) Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \leq 6$.

Στη συνέχεια, για $\alpha = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$. Το $(2 - x)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου και η διαίρεση του $P(x)$ με το $(x + 1)$ δίνει υπόλοιπο –12

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β

β) Αν η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(2 - x)(x + 1)$ είναι

$$P(x) = (2 - x)(x + 1) \cdot \Pi(x) + \kappa x + \lambda, \text{ με } \kappa, \lambda \in R$$

να προσδιορίσετε τα κ, λ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 4x - 8$

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a(x^3 - 1) - ax(x + a) + x(x - 1)$, $x \in R$, $a > 0$

α) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με το $(x - 1)$ είναι $\alpha - \alpha^3$, να βρείτε την τιμή του α

β) Για την τιμή του α που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$

γ) Αν κ μία από τις λύσεις της εξίσωσης $P(x) = 0$, να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\varphi = \kappa$ με $\varphi \in (0, \pi)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 4\varphi = \frac{1}{2}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 3\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta - 7\sigma\upsilon\nu\theta - 5 = 0$, $\theta \in (0, \pi)$

4.4 Εξισώσεις και Ανισώσεις που Ανάγονται σε Πολυωνυμικές

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{x^2-1}$ ii) $\frac{x^2+2x-4}{x-2}=x^2$ iii) $x^4+\frac{1}{x^4}=\frac{257}{16}$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

   i) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}<\frac{3}{x^2-1}$ ii) $\frac{x^2+2x-4}{x-2}\leq x^2$ iii) $x^4+\frac{1}{x^4}\geq\frac{257}{16}$

3. Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{\frac{5x+3}{4-x^2}-\frac{x(x+7)}{x+2}}$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $2\sigma\upsilon\nu^4x-5\sigma\upsilon\nu^3x+5\sigma\upsilon\nu x-2=0$

   ii) $2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x-3\eta\mu x+4=0$

   iii) $(2\eta\mu x-1)^4+6(2\eta\mu x-1)^2-7=0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $x^2-x-18-\frac{72}{x^2-x}=0$

   ii) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=2$

   iii) $\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2-4\frac{2x}{x-1}+3=0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{7x+1}$

   ii) $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+4}=\sqrt{x-4}$

   iii) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

   iv) $\frac{4-\sqrt{x}}{2}=\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$

   v) $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-3$

   vi) $x^2-6x-2\sqrt{x^2-6x+2}=1$

   vii) $\sqrt{y+32}=16-\sqrt{y}$

   viii) $\sqrt[3]{x^3+9x^2}=x+3$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $\sqrt{x^2+1}=x-a,\ \ a\in R$

   ii) $\sqrt{x^2-5x+6}=x+a,\ a\in R$

   iii) $x+\sqrt{x^2+x+a^2+1}=a,\ a\in R$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}-3=0$ ii) $\sqrt[3]{(x-1)^2}-4\sqrt[3]{x-1}+3=0$

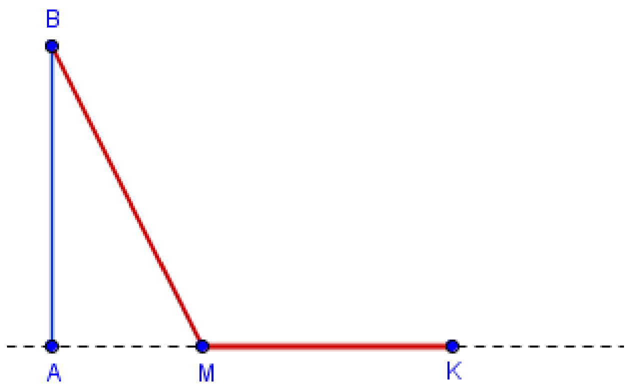
9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

   i) $\sqrt{3t+7}<\sqrt{t+3}$ ii) $y-1\geq\sqrt{y+5}$ iii) $\sqrt{2-x-x^2}>x-3$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{3}(x+1)$.

    Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη g

11. Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας με ταχύτητα 3 km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με ταχύτητα 5 km/h.



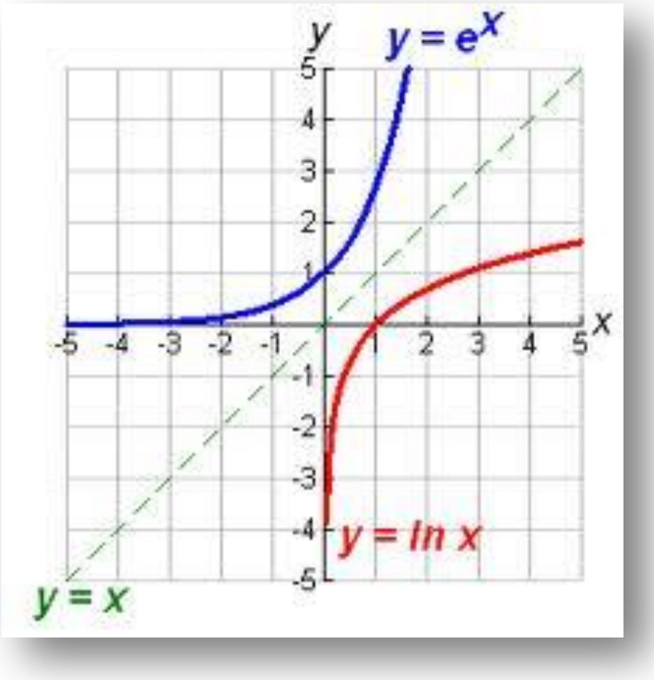
    Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, να υπολογίσετε:

    α) Την απόσταση ΒΜ ως συνάρτηση του x

    β) Το χρόνο που χρειάζεται για να ολοκληρώσει τη συνολική διαδρομή του ως συνάρτηση του x

    γ) Την απόσταση x για την οποία ο παραπάνω χρόνος είναι 1 ώρα και 36 λεπτά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση



5.1 Εκθετική Συνάρτηση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$

   ii) $3^{-x} = \frac{1}{81}$

   iii) $27^{4x} = 9^{x+1}$

   iv) $(4^{3-x})^{2-x} = 1$

   v) $3^{\sqrt{x}} = 243$

   vi) $\left(\sqrt{3}+1\right)^{x^4-5x^2+4} = 1$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$

   ii) $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$

   iii) $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} = 128 + 3^{x-2}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0$

   ii) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

   iii) $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$

   iv) $5^{x^2+1} + 25^{x^2} = 6$

   v) $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$

   vi) $3^{x-1} - \frac{4}{3}\sqrt{3^x} = -1$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

   ii) $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}$

   iii) $5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 7 \cdot 5^{x-3} - 2^x$

   iv) $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$

   v) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

   vi) $2^{\frac{6x-13}{2}} + 3^{2x-3} = 3^{2x-4} + 8^{\frac{2x-3}{2}}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

   ii) $3^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $x^{x^2-x-2} = 1$ ii) $(x^2-x+1)^{x^2-x-2} = 1$ iii) $x^x = x$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

   i) $7^{x+1} < 7^{2x-4}$

   ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$

   iii) $5^{x^2-5x+6} < 1$

   iv) $2^{x^2-3x} > \frac{1}{4}$

   v) $3^{x^2-3x+2} > 1$

   vi) $2^{3x-1} < (16)^{2x+1}$

   vii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2} < \left(\frac{1}{8}\right)^{2x}$

   viii) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

   ix) $e^{x^2-7} > \left(\frac{1}{e}\right)^{4x-5}$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 9^{x-1}\,3^{y} = 243 \\ 2^{x+3}\,2^{y-5} = 16 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2^{x+3} = 8^{y+2} \\ 9^{y+1} = 3^{x+11} \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2 \cdot 5^{x} + 3^{y} = 53 \\ 5^{x+1} - 3^{y+1} = 116 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 3^{x+1} + 5^{y} = 10 \\ 3^{2x-1} + 2 \cdot 5^{y+1} = 13 \end{cases}$

9. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2^{x} = 3y \\ 3^{x} = 2y \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^{y} - y^{x} = 0 \\ x = y^{2} \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^{2x-y-1} = 11 \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 3^{2x-y} = -17 \end{cases}$

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4^{a} \cdot x^{3} - 2^{a+1} \cdot x^{2} - 9x + 1$, με $\alpha \in R$.

Να βρείτε το α, έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το $(x-1)$

11. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i) $f(x) = 3^{x+1} + 2$

ii) $f(x) = e^{x+2} + 1$

iii) $f(x) = e^{x^2+1}$

iv) $f(x) = e^{x^2-1}$

v) $f(x) = e^{|x+1|}$

vi) $f(x) = e^{|2x-1|}$

vii) $f(x) = \frac{3^{x}+3^{-x}}{2}$

viii) $f(x) = e^{|x^2-1|}$

12. α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{x} \quad \text{και} \quad g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

β) Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y

13. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1 – 1" :

i) $f(x) = 2x + 3$

ii) $f(x) = 2x^{2} + 1$

iii) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

iv) $f(x) = 5 + \sqrt{x+1}$

v) $f(x) = \frac{2^{3x-1}+3}{4}$

vi) $f(x) = 2 \cdot e^{x+3} + 1$

14. i) Να βρείτε το α ($\alpha \neq 5$) ώστε η $f(x)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^{x}$ να είναι γνησίως αύξουσα

ii) Να βρείτε το α ($\alpha \neq 0$) ώστε η $g(x)=\left(1-\frac{5}{\alpha}\right)^{x}$ να είναι γνησίως φθίνουσα

15. Να λύσετε την εξίσωση: $2002^{\eta\mu^2 x} + 2002^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2003$

16. α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in R$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το R η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\kappa + 1}{2 - \kappa}\right)^x$$

β) Για ποιες από τις τιμές του προηγούμενου ερωτήματος η συνάρτηση είναι:

i) γνησίως αύξουσα ii) γνησίως φθίνουσα

γ) Αν $\kappa = 1$, να λύσετε την εξίσωση: $f(2\,\eta\mu^2 x) + f(2\,\sigma\upsilon\nu^2 x) = 5$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^x$, $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο R

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{e} = f(1) - f(0)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x + f(0) = 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta}\right)^x$, $x \in R$ και $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο R

β) Να αποδείξετε ότι $f(1) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

γ) (*) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(-x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

19. Σε έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο.

Η θερμοκρασία (πυρετός) $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου δίνεται

από τον τύπο $\Theta(t) = 36 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου

α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο

β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει τη φυσιολογική τιμή των 36,5 βαθμών κελσίου

γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες, να βρείτε πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου

20. Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:

i) 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν 400

ii) 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν 3200

Αν η συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων είναι $P(t) = P_0 \cdot 2^{kt}$, όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t, P_0 ο αρχικός αριθμός και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηριδίων, τότε:

α) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς k

β) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά ο αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί

21. (*) Ο πληθυσμός μιας πόλης είναι σήμερα 10.000 κάτοικοι και μετά από 10 έτη προβλέπεται ότι θα είναι 20.000 κάτοικοι. Υπολογίσθηκε δε, ότι σε $t \geq 0$ χρόνια, ο πληθυσμός της πόλης (σε χιλιάδες) προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη συνάρτηση

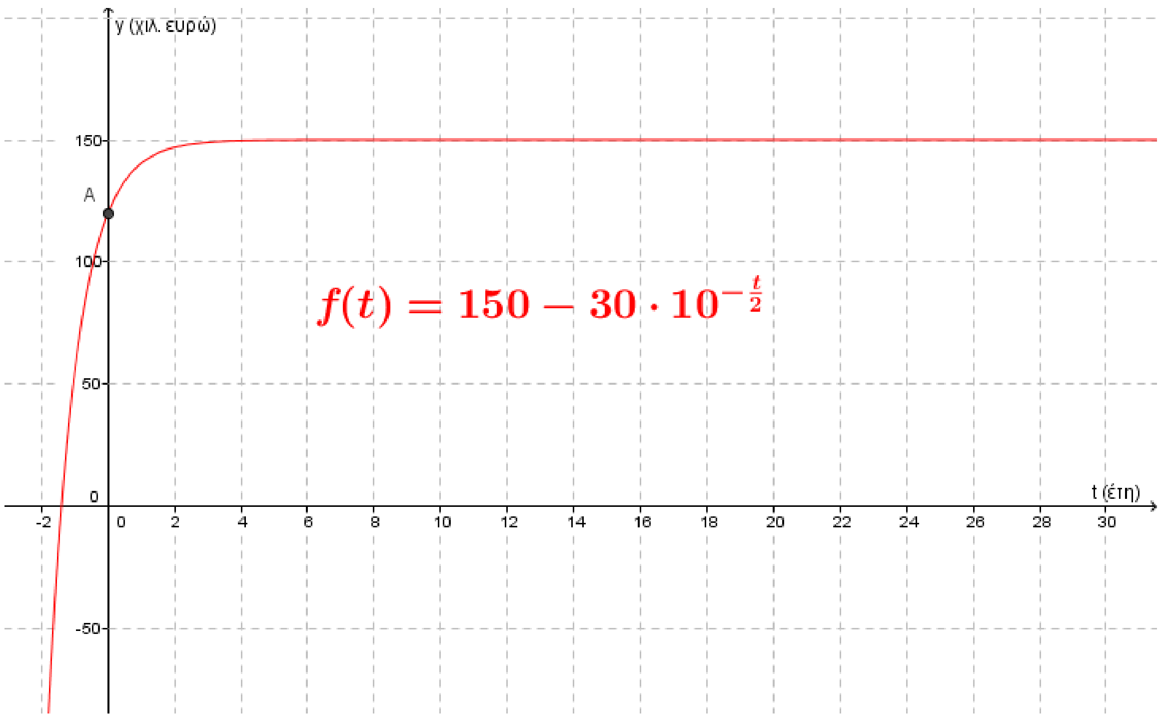
$$N(t) = c \cdot e^{k \cdot t}, \text{ όπου } c, k \in R$$

α) Να βρείτε τις σταθερές c, k

β) Να βρείτε σε πόσα χρόνια από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι τετραπλάσιος του σημερινού

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(N(t)\right)^3 - 4\left(N(t)\right)^2 + N(t) + 6 > 0$

22. Η αξία (σε χιλιάδες ευρώ) ενός πίνακα ζωγραφικής σε $t \geq 0$ έτη από σήμερα, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 150 - 30 \cdot 10^{-t/2}$



α) Να βρείτε τη σημερινή αξία του πίνακα

β) Να αποδείξετε ότι η αξία του πίνακα αυξάνεται συνεχώς

23. Ο πληθυσμός μιας κοινωνίας βακτηριδίων σε $t \geq 0$ ώρες δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = A + B\left(1 - 2^{-t/4}\right)$ χιλιάδες βακτηρίδια. Ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας είναι 10.000, ενώ σε 4 ώρες έχει φθάσει τις 12.000

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς που αντιστοιχούν στις σταθερές A και B

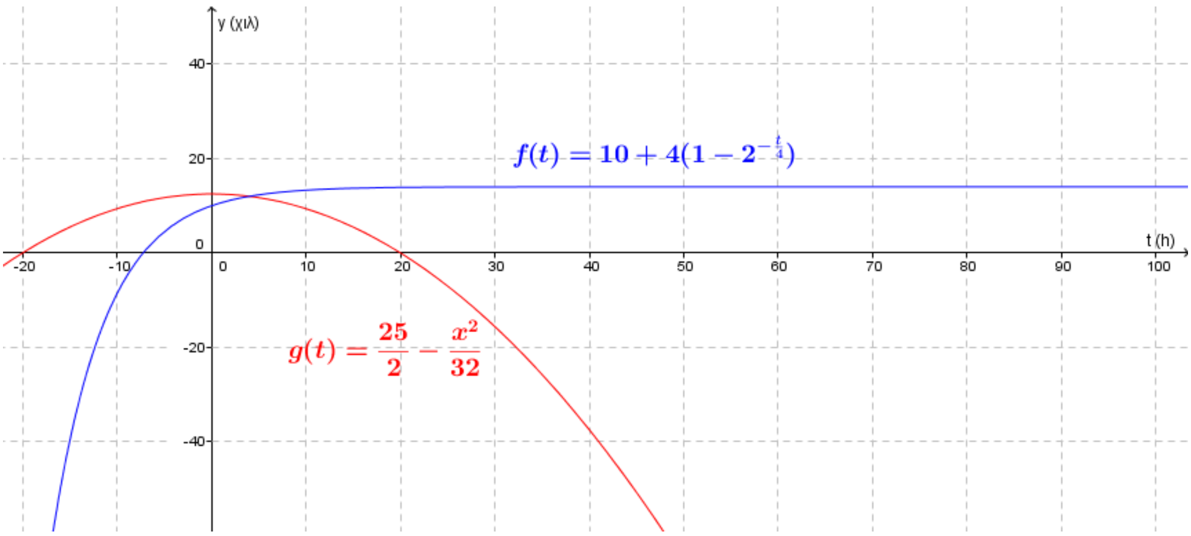
β) Να βρείτε σε πόσες ώρες ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα είναι 13.000

γ) Μετά από 4 ώρες, στον υπάρχοντα πληθυσμό βακτηριδίων, ρίχνεται μία τοξική ουσία. Έτσι σε $t \geq 4$ ώρες, ο πληθυσμός προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $g(t) = \kappa - \frac{t^2}{32}$ χιλιάδες βακτηρίδια, όπου κ πραγματική σταθερά

γ1) Να βρείτε τη σταθερά κ

γ2) Να βρείτε σε πόσες τουλάχιστον ώρες θα έχει εξαφανισθεί ο πληθυσμός των βακτηριδίων

(Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που επιλύουν το πρόβλημα)



24. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $u(t) = 4^t - 2^{t+3} + 24\ m/s$, όπου $t \geq 0$ ο χρόνος (σε sec)

α) Να αποδείξετε ότι η μικρότερη τιμή της ταχύτητας του σώματος είναι $8\ m/s$ Ποιά χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

β) Αν τις χρονικές στιγμές $t_1 \geq 0$ και $t_2 \geq 0$ το σώμα έχει την ίδια ταχύτητα, ίση με $\omega\ \ m/s$, να αποδείξετε ότι:

β1) $2^{t_1} + 2^{t_2} = 8$

β2) (*) $t_1 + t_2 = \frac{\log(24 - \omega)}{\log 2}$

25. Ο αρχικός πληθυσμός μιας κοινωνίας μικροβίων είναι 3.000 και κάθε ώρα που περνάει διπλασιάζεται.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει το πλήθος των μικροβίων σε ν ώρες, $\nu \in N^*$

β) Να βρείτε το πλήθος των μικροβίων σε 5 ώρες

γ) Να βρείτε σε πόσες ώρες το πλήθος των μικροβίων θα είναι 384.000

δ) Σε 5 ώρες ρίχνεται μία τοξική ουσία στον πληθυσμό των μικροβίων, η οποία προκαλεί μείωση του πληθυσμού κατά 6.000 μικρόβια την ώρα. Να βρείτε σε πόσες τουλάχιστον ώρες θα αφανισθεί ο πληθυσμός των μικροβίων

26. (*) Μία ποσότητα 30 γραμμαρίων ενός ραδιενεργού υλικού διασπάται σύμφωνα με τη συνάρτηση $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-ct}$, όπου $Q(t)$ είναι η ποσότητα του υλικού που απομένει μετά από t έτη, $Q_0 = Q(0)$ η αρχική ποσότητα του υλικού και c μια θετική σταθερά. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του ραδιενεργού υλικού είναι 50 έτη

α) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς c

β) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συγκεκριμένης συνάρτησης παίρνει τη μορφή

$Q(t) = 30 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/50}$, $t \geq 0$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση

γ) Να βρείτε την ποσότητα του ραδιενεργού υλικού που θα έχει απομείνει ύστερα από 100 έτη

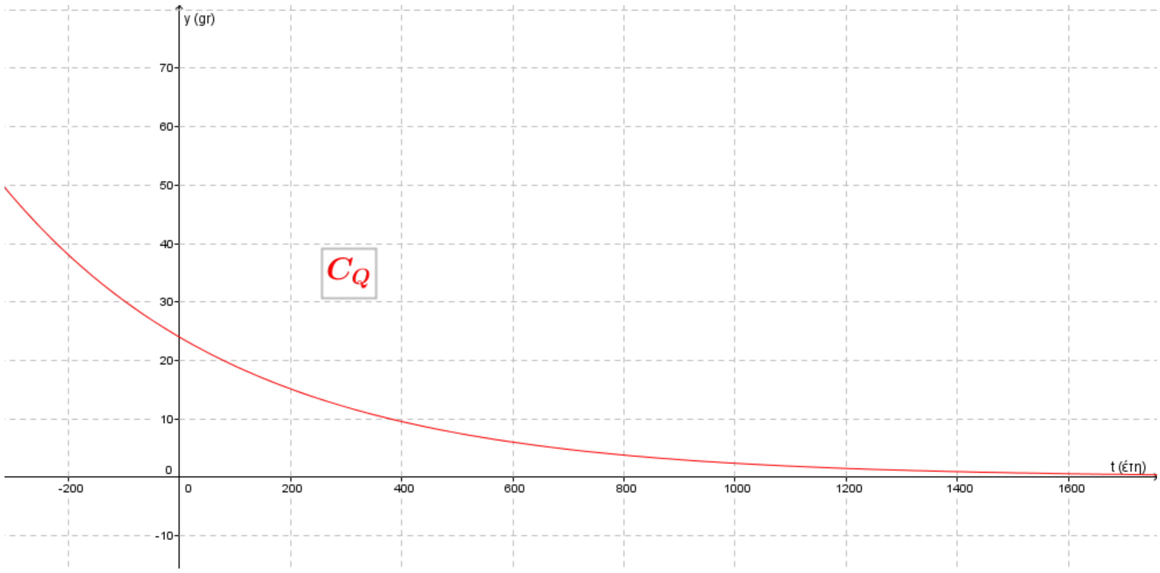
27. Πραγματοποιήθηκε μία πειραματική ρίψη βόμβας που κατά την έκρηξη της απελευθερώνει 24 γραμμάρια ουρανίου. Η ποσότητα του ουρανίου (σε γραμμάρια) ακολουθεί το νόμο της εκθετικής απόσβεσης και η ημιζωή του είναι 300 έτη

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την παραπάνω μεταβολή είναι η

$$Q(t) = 24 \cdot 2^{-t/300},\ t \geq 0$$

β) Να βρείτε την ποσότητα του ουρανίου που θα έχει απομείνει μετά από 900 έτη

(Ακολουθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης)



28. Ένα φυσικό μέγεθος $N(t)$ αυξάνει συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής αύξησης και σε 20 έτη από την αρχή του πειράματος έχει τριπλασιάσει την αρχική του ποσότητα

α) Να αποδείξετε ότι ύστερα από t έτη, η ποσότητα του θα δίνεται από τη συνάρτηση $N(t) = N_0 \cdot 3^{t/20}$, όπου N_0 η αρχική ποσότητα

β) Να βρείτε ποια θα είναι η ποσότητά του ύστερα από 60 έτη

29. Σε μία πόλη 10.000 κατοίκων εμφανίζεται για πρώτη φορά μία μεταδοτική γρίπη, έτσι ώστε σε $t \geq 0$ μήνες να προσβάλλονται από αυτήν κατά προσέγγιση:

$N(t) = 10\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^t\right]$ χιλιάδες κάτοικοι

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κατοίκων που προσβάλλονται από τη γρίπη συνεχώς αυξάνει

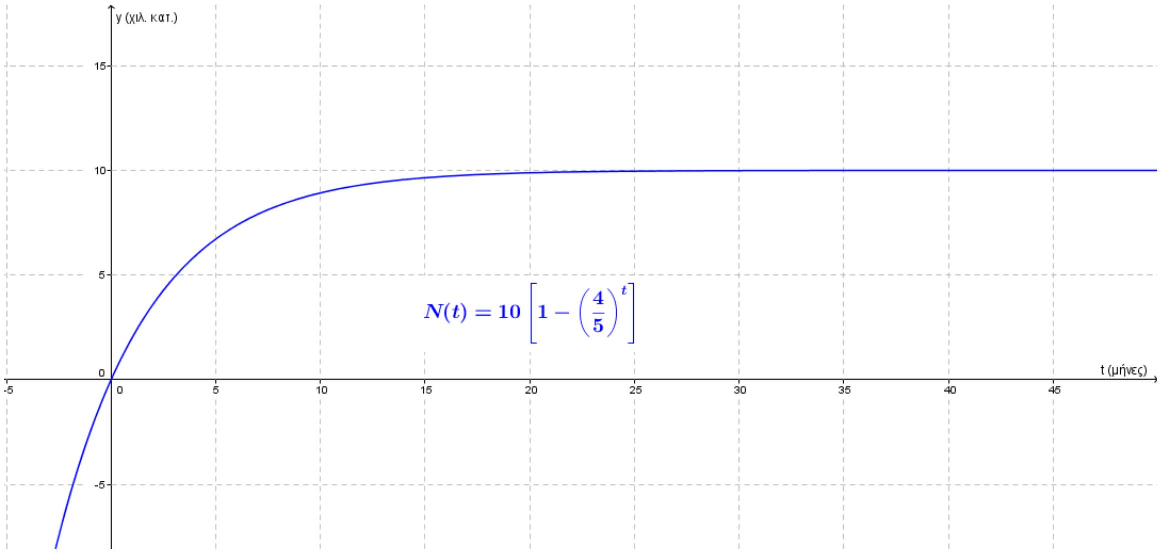
β) Να βρείτε σε πόσους μήνες το πλήθος των κατοίκων που έχουν προσβληθεί θα αποτελεί το 20% του αρχικού πληθυσμού

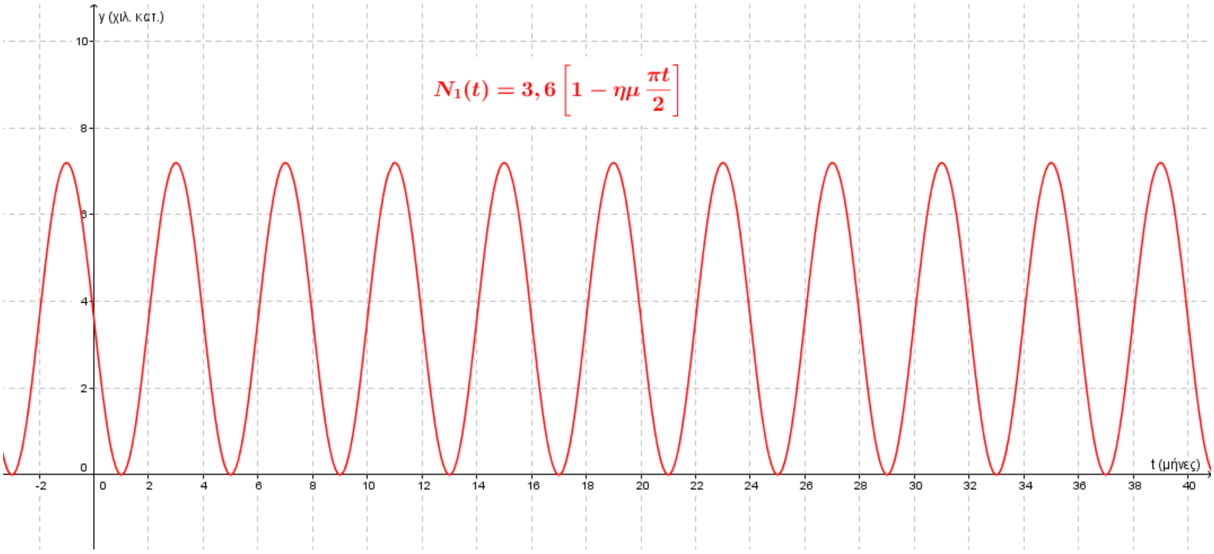
γ) Σε t_0 μήνες από την αρχή του φαινομένου, διαπιστώνεται ότι έχει προσβληθεί το 36% των κατοίκων, οπότε χορηγείται στον κόσμο η κατάλληλη αντιβίωση.

Έτσι σε $t \geq t_0$ μήνες το σύνολο των προσβληθέντων κατοίκων προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη συνάρτηση: $N_1(t) = 3600\left[1 - \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{t_0}\right)\right]$ κάτοικοι.

Να βρείτε σε πόσους μήνες t_1 μετά την κατάλληλη θεραπεία θα έχει εξαφανισθεί η γρίπη

(Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων)


y (χιλ. κατ.)
$N(t) = 10\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]$
t (μήνες)


y (χιλ. κατ.)
$N_1(t) = 3,6\left[1-\eta\mu\,\frac{\pi t}{2}\right]$
t (μήνες)

5.2 Λογάριθμοι – Λογαριθμική Συνάρτηση

1. Να υπολογισθεί ο x, αν:

   i) $\log_2 \frac{1}{2} = x$

   ii) $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} = x$

   iii) $\log_x 16 = \frac{2}{3}$

   iv) $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{2}{5}$

   v) $\log_{\frac{3}{2}} x = 4$

   vi) $\log_{\frac{1}{7}} x = -\frac{2}{3}$

2. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

   i) $\log_2 4 + 3\log_2 2 = 3 + 2\log_2 2$

   ii) $\frac{1}{2}\log_2 256 + \log_2 3 - \log_2 18 = 3$

   iii) $2\log_3 4 + \log_3 18 - 5\log_3 2 = 2$

   iv) $3\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 16 = 5\log_3 2$

   v) $3\log_3 2 - \log_3 32 + 2\log_3 6 = 2$

   vi) $2 + 3\log_5 2 - 2\log_5 10 = \log_5 2$

   vii) $2(\log 2 + \log 5) + \log 1000 = 5$

   viii) $\log 3 + \log 4 - \log 12 = 2\log 2$

3. (*) Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

   i) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 = 2$

   ii) $\log_{\alpha^\kappa} \theta = \frac{1}{\kappa}\log_\alpha \theta\,,\ \ \kappa \in R^*$

   iii) $\log_\alpha \theta \cdot \log_{\alpha^2} \theta = \frac{1}{2}(\log_\alpha \theta)^2$

4. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

   i) $A = 10^{1-log5}$ ii) $B = 100^{1+\log\sqrt{8}-\log 3}$

5. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^\nu}\,,\ \ \nu \in N^*$

6. Να αποδείξετε ότι: $\ln\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\cdots\sqrt{e}}}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\nu,\ \ \nu \in N^*$ (ν: το πλήθος των ριζικών)

7. Να λύσετε τις εκθετικές εξισώσεις:

   i) $5^x = 2^{1-x}$

   ii) $3^{2x+1} = 2^{x-1}$

   iii) $3^x = 4$

   iv) $2^{2-3x} = 5$

   v) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

   vi) $e^{\sqrt{x+1}} = 3$

   vii) $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $\log(1+x) = \log(1-x)$

   ii) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2$

   iii) $\log(x-2) + \log(x-2) = 1 - \log 2$

   iv) $\log(x-9) + 2\log\sqrt{2x-1} = 2$

   v) $2\log(x-1) + \log(2x+5) = 3\log(x-1)$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i) $\log^2 x - 2 = \log x$

   ii) $\ln^2 x + 2 = \ln x^3$

   iii) $\log^3 x - (\log x^2)^2 + \log x + 6 = 0$

   iv) $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

    i) $x\log 3 + \log(3^x - 2) = \log 3$

    ii) $x\log 2 = \log(4^x - 12)$

11. Να αποδείξετε ότι $3^{\log x} = x^{\log 3}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση:

$$3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$$

    (*) Γενίκευση: Να αποδείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με x, y > 0

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

    i) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x) > 0$

    ii) $\log_2(x^2 - 3x + 2) \leq 0$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

    i) $\ln^2 x - \ln x^3 + 2 < 0$

    ii) $\log^2 x - \log x < 3$

14. Να λύσετε την ανίσωση: $\log_2\left(6 - 2^x\right) < 3 - x$

15. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(3 \cdot e^{2x} - 2) < -x$

16. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(1 + \ln\theta)x + 1 - \ln^2\theta = 0$, όπου $x \in R$ και $\theta > 0$

    Να βρείτε τις τιμές του θ, για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες:

    i) πραγματικές

    ii) ομόσημες

17. Να λύσετε τα συστήματα:

    i) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{x\,y} = 1 \end{cases}$

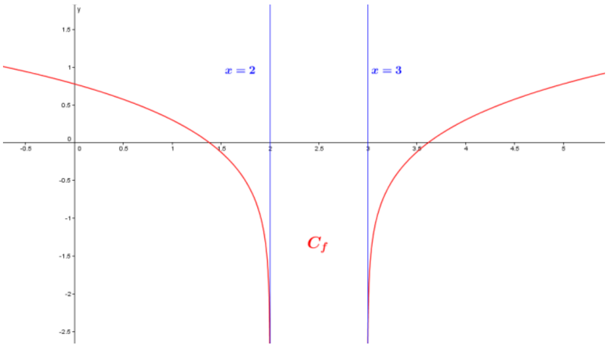
    ii) $\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x\,\log 5 + y\,\log 2 = \log 20 \end{cases}$

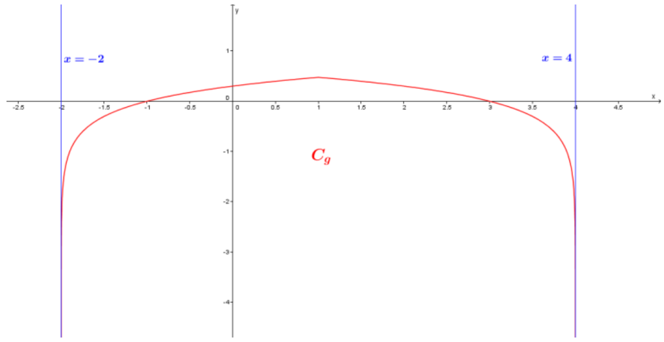
    iii) $\begin{cases} 3\log x + 3\log y = 8 \\ \log\sqrt{x} - \log\sqrt{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

18. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

    i) $f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$

    ii) $g(x) = \log(3 - |x - 1|)$



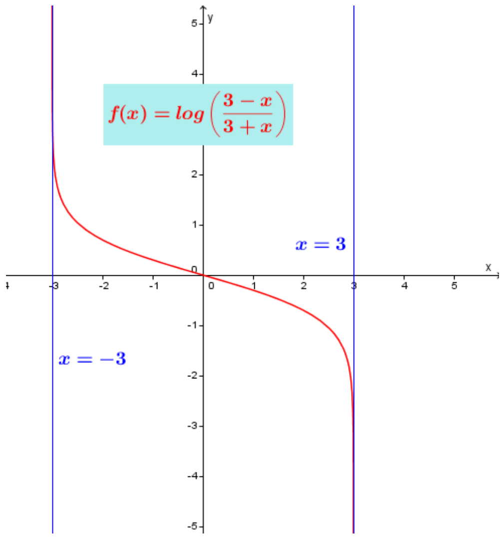


19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{3-x}{3+x}$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$



20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \ln(x-1)$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y΄y

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21. Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δρχ), t έτη μετά από την κυκλοφορία του στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δρχ, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής τιμής. Αν είναι γνωστό ότι η σχέση που συνδέει την τιμή με το χρόνο είναι:

$$\ln Q(t) = a\,t + \beta, \quad t \geq 0 \text{ και } \alpha, \beta \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι: $Q(t) = 3 \cdot 4^t, \ t \geq 0$

β) Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής

γ) Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής του τιμής

(Πανελλαδικές εξετάσεις 2001)

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

(Πανελλαδικές εξετάσεις 2002)

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2\,e^{x} + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^{x} - 1)$

α) Να βρείτε τα Πεδία Ορισμού των δύο συναρτήσεων

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2\,g(x)$

(Πανελλαδικές εξετάσεις 2003)

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\log^2 x}{\log x^2}$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{f(x)} < 1$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x} + \ln x + x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι "1 – 1"

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2+1} - e^{2x} = \ln 2x - \ln(x^2 + 1) - (x - 1)^2$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x} + x$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in R$

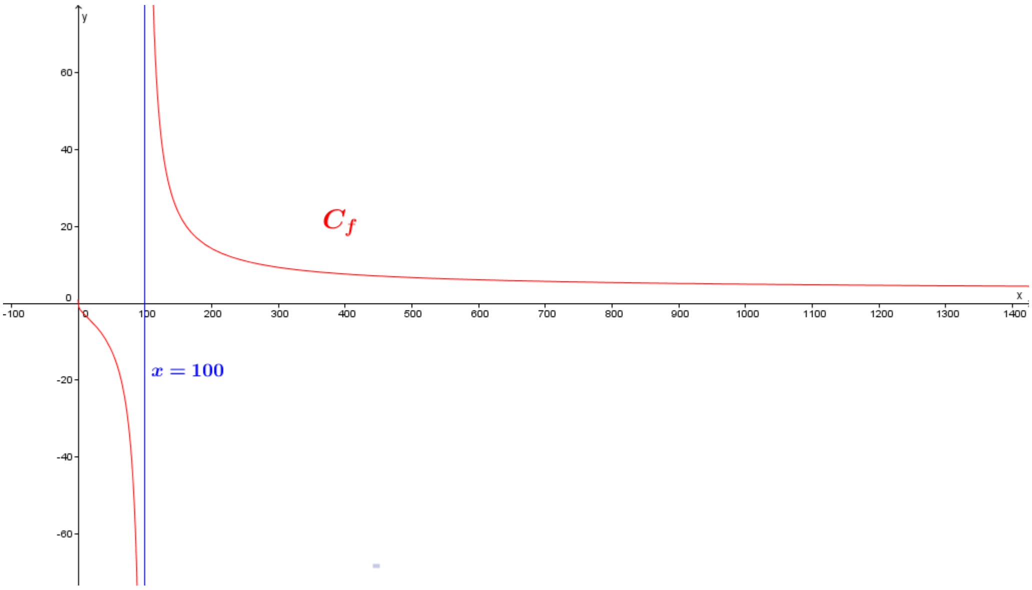
27. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^{x^2+x-6} - 56$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^{x^2+x-9}$ και πάνω από την ευθεία $y = -24$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\log x + 2}{\log x - 2}$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}$

(Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης)



29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx,\ x > 0$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(2 - ημx) - f(συν^2x - ημ^2x) = f(3),$ αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

β) Αν $α > 0$ και $f(α) + f(α^2) + \cdots + f(α^{100}) = 5050$, τότε να αποδείξετε ότι $α = e$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\sqrt{f(x)} + f(x) - 12 > 0$

30. Οι αριθμοί $log(3 \cdot 2^x - 1),\quad log(4 \cdot 2^x - 1),\quad log(8 \cdot 2^x - 2)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου

α) Να βρείτε την πραγματική τιμή του x

β) Αν ο τέταρτος όρος της παραπάνω προόδου είναι ίσος με $-\log 2$, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^{\frac{\log x + 8}{3}} = 10^{1+\log x^2}$

ii) $\log_{x+2}\left(17x^2 - 6x + 8\right) = 3$

iii) $\ln(συνx) = 0$

iv) $2^{\log x} + 3 \cdot 4^{\log x} = 52$

v) $2\log 3 + \log\left(2^x - 3^x\right) = x\log 2 + \log 5$

32. Να λύσετε την εξίσωση: $48 - 3^{x/4} + 11 \cdot 3^{x/6} - 40 \cdot 3^{x/12} = 0$

33. α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$

34. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\log\alpha)\, x^2 + (\log\beta)\, x - 2$, με $\alpha, \beta > 0$ έχει ρίζα τη μονάδα

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 10$

β) Να βρείτε τα α, β, αν γνωρίζετε ότι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$ είναι ένα πολυώνυμο με ίσες πραγματικές ρίζες

35. Δίνεται μία γεωμετρική πρόοδος (α_ν), με πρώτο όρο $\alpha_1 = \log\alpha$ και λόγο $\lambda = \log\beta$, όπου $\alpha, \beta > 1$. Επιπλέον είναι γνωστοί οι όροι $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_7 = 192$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_\nu = \log(\alpha_\nu)$ είναι αριθμητική πρόοδος

γ) Να υπολογίσετε τον φυσικό αριθμό ν > 1, αν ισχύει η ισότητα:

$$\beta_4 + \beta_9 + \beta_{14} + \beta_{19} + \cdots + \beta_\nu = \frac{\nu+1}{5}\log 3 + 255\,\log 2$$

36. Δίνονται οι αριθμοί $\log 2$, $\log 2x$, $\log(x+2)$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι $\log 2x$ και $\log(x+2)$

β) Αν οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x και να υπολογίσετε τη διαφορά της αριθμητικής προόδου

37. Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, έτσι ώστε οι αριθμοί $x_1 = \varepsilon\varphi B$ και $x_2 = \varepsilon\varphi\Gamma$ να αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $\log(x^2+1) = \log 5 + \log(x-1)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς x_1, x_2

β) Να υπολογίσετε τη γωνία A του τριγώνου

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x + \ln\frac{1}{x}$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) Να βρείτε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $f(\sigma\upsilon\nu x) = 0$ οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $[0, 2011\pi]$

δ) Αν $f(a) = f(\beta)$ με $\alpha \neq \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $a \cdot \beta = e$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2e^{3x} - e^x)$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(2e^{2x} - 1) + x$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$

δ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x

ε) Αν α είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η ανίσωση $e^{f(x)} - 2e^{3x-2a} > 0$ είναι αδύνατη

41. Ο θόρυβος y ενός ήχου σε dB (ντεσιμπέλ) δίνεται από τη συνάρτηση $y = 20\log\frac{x}{20}$, όπου x είναι η πίεση που ασκεί το ακουστικό κύμα στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα μετρούμενη σε μP (μικροPascal)

α) Να βρείτε πόση πίεση ασκεί ένα αθόρυβο κύμα στα μόρια του αέρα

β) Ένας κεραυνός άσκησε πίεση $x = 2 \cdot 10^{6,5}$ μP στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα. Να βρείτε πόσα dB ήταν ο θόρυβος που προξένησε

[<u>Σχόλιο</u>: Μια ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβός της είναι 20dB (όσος ο θόρυβος του θροΐσματος των φύλλων ενός δένδρου σε ελαφρύ φύσημα του αέρα). Είναι ο μικρότερος θόρυβος που ανιχνεύεται]

42. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 20 λίτρα ενός πτητικού υγρού, το οποίο εξατμίζεται με ρυθμό 10% ανά εβδομάδα

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που θα μείνει στο δοχείο:

α_1) στο τέλος της $1^{ης}$ και στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας

α_2) μετά από t εβδομάδες

β) Να βρείτε μετά από πόσες εβδομάδες η ποσότητα του υγρού που θα μείνει στο δοχείο είναι η μισή της αρχικής

(Δίνονται: $log\,0{,}9 \cong -0{,}04$ και $log\,2 \cong 0{,}3$)

43. Το ποσοστό (%) των πωλήσεων ενός νέου προϊόντος (μερίδιο στην αγορά), ύστερα από t μήνες εμφάνισής του στην αγορά, δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(t) = 90 - 80\left(\frac{3}{4}\right)^t$

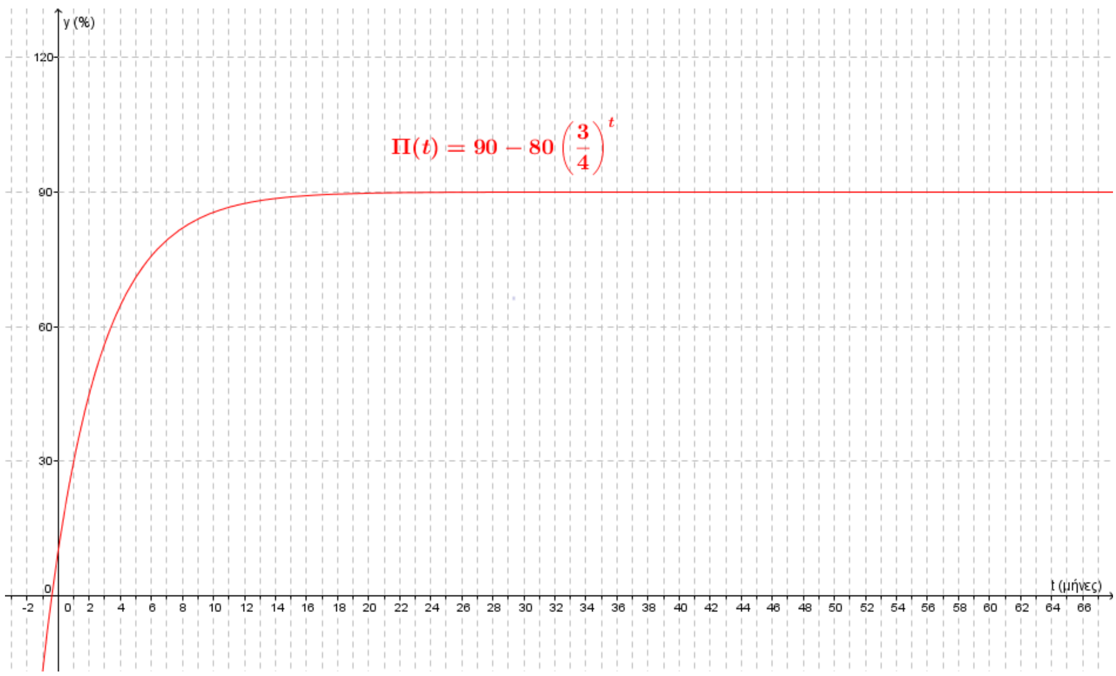
α) Να βρείτε ποιο θα είναι το ποσοστό των πωλήσεων του προϊόντος, μετά τον πρώτο μήνα και μετά από πέντε μήνες εμφάνισής του στην αγορά

β) Να βρείτε ποιόν μήνα από τότε που εμφανίζεται το προϊόν στην αγορά, το ποσοστό των πωλήσεων φθάνει το 70%

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί το προϊόν δε θα πετύχει ποτέ ποσοστό πωλήσεων 100%

δ) Ποιο θα είναι το μεγαλύτερο ποσοστό των πωλήσεων του προϊόντος ύστερα από “πάρα πολλούς” μήνες κυκλοφορίας στην αγορά;

(Δίνονται: $log\,2 \cong 0{,}3$ και $log\,3 \cong 0{,}48$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης)



44. Δίδεται ένα αγροτεμάχιο σχήματος ορθογωνίου, οι διαστάσεις του οποίου (σε εκατοντάδες μέτρα) αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0$

   Ο ιδιοκτήτης το χωρίζει σε άνισα μεταξύ τους κομμάτια, με σκοπό την πώλησή τους, των οποίων τα εμβαδά εκφρασμένα σε στρέμματα, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 100^{1/2-(\log 25)/4}$

   Το τρίτο σε σειρά μεγέθους κομμάτι το πωλεί με τίμημα $5\ \varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}/m^2$

   α) Να βρείτε το εμβαδόν του αγροτεμαχίου

   β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι $\omega = 2$

   γ) Αν η πώληση του 3$^{\text{ου}}$ κομματιού απέφερε στον ιδιοκτήτη 30.000 ευρώ, να βρείτε σε πόσα κομμάτια χωρίστηκε το αγροτεμάχιο

45. Για την καταπολέμηση 1.000.000 εντόμων σε μια περιοχή γίνεται καθημερινό ράντισμα, με αποτέλεσμα να σκοτώνεται κάθε ημέρα το 10% των εντόμων

   α) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει το πλήθος των εντόμων $N(t)$, t ημέρες μετά το πρώτο ράντισμα

   β) Να βρείτε πόσα έντομα θα υπάρχουν ύστερα από 10 ημέρες

   γ) Να βρείτε σε πόσες ημέρες θα εξαφανισθούν τα έντομα

   (Δίνονται: $0{,}9^{10} \cong 0{,}35$ *και* $\log 9 \cong 0{,}954$*)*