ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: "ΜΙΑ ΠΟΡΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ"

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2013 - 2014
Ομάδα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών – Προβλημάτων:

Αλκιβιάδης Τζελέπης

Αμαλία Μανιατοπούλου

Αντωνία Αρμάου

Ευγενία Παπασπηλίου

Μυρτώ Καλαφάτη

Παναγιώτης Κολλιόπουλος

Πέτρος Αρμάος

ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2013 – 2014

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
“ΜΙΑ ΠΟΡΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ”

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2014

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο πλαίσιο του Εργαστηρίου Άλγεβρας του Πρότυπου Πειραματικού Λυκείου Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης εργάσθηκε η Ομάδα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών – Προβλημάτων, η οποία είχε ως στόχο να προτείνει μία προσέγγιση ενσωμάτωσης των προβλημάτων στην καθημερινή διδακτική πρακτική.

Στην προσπάθεια να δώσουμε απάντηση στο αίτημα για σύνδεση της διδασκαλίας των Μαθηματικών με την «πραγματικότητα», η ομάδα μας ανέλαβε να σχεδιάσει και να υλοποιήσει μια σειρά από δραστηριότητες και προβλήματα εντός σχολικής τάξης.

Ενώ οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία αποδέχονται το γεγονός ότι η διαδικασία μάθησης των Μαθηματικών είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα, η πρακτική της δραστηριοποίησης των μαθητών για την αντιμετώπιση ενός ‘άγνωστου προβλήματος’ με στόχο την ‘οικοδόμηση’ νέων μαθηματικών γνώσεων, έχει εξαιρετικά περιορισμένη εφαρμογή.

Επιδίωξή μας αυτή τη χρονιά είναι να συμπληρώσουμε την παραδοσιακή διδασκαλία με κατάλληλα επιλεγμένα προβλήματα τα οποία, αφενός να κεντρίσουν την περιέργεια των μαθητών αφετέρου να προκαλέσουν το ενδιαφέρον τους για εφαρμογή στρατηγικών και διερεύνηση αποτελεσμάτων.

Έχουμε ασχοληθεί με προβλήματα:

- Ιστορικά
- Φυσικής και εξισώσεις κίνησης
- Γεωμετρίας, Οικονομίας, καθημερινής εμπειρίας
- Διαθεματικά
- Ελαχιστοποίησης και Μεγιστοποίησης με μελλοντική προοπτική και επεκτάσεις
- Μια πρώτη ματιά στο άπειρο

Δουλέψαμε με προβλήματα κατάλληλα για:

- ✓ Εισαγωγή έννοιας όπου ήταν απαραίτητο (Πιθανότητες, Ακολουθίες)
- ✓ Υπενθύμιση προγενέστερων γνώσεων
- ✓ Εμπέδωση γνώσεων
- ✓ Κινητοποίηση των μαθητών
- ✓ Αξιολόγηση
- ✓ Ανοικτά προβλήματα

Στην παρούσα εργασία υπάρχουν κάποια φύλλα εργασίας με τα οποία αναδεικνύεται η προσπάθεια προτυποποίησης. Είναι προφανές ότι είναι ενδεικτικά και ότι κάθε εκπαιδευτικός έχει τον προσωπικό του τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει τα μαθηματικά ζητήματα.

"I have no special talent. I am only passionately curious"

Albert Einstein

Εργαστήρι Άλγεβρας Πρότυπου Πειραματικού ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

(http://algebrateacherlab.blogspot.gr/)

Η Ομάδα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών – Προβλημάτων:

Αλκιβιάδης Τζελέπης

Αμαλία Μανιατοπούλου

Αντωνία Αρμάου

Ευγενία Παπασπηλίου

Μυρτώ Καλαφάτη

Παναγιώτης Κολλιόπουλος

Πέτρος Αρμάος

Κεφάλαιο Ι:

ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΝΤΑΣ ΤΙΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Μια σημαντική επιρροή στην ανάπτυξη σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων βασίζεται στο αυξανόμενο ενδιαφέρον για τη μάθηση μέσα από την επίλυση προβλημάτων. Μέσω αυτού του μοντέλου προσεγγίζονται η γνώση και οι δεξιότητες ως προϊόντα ατομικής γνωστικής συγκρότησης και εμπειρίας, αφού ο ρόλος του διδάσκοντα δεν είναι να μεταφέρει στους μαθητές τη μια και μοναδική αλήθεια, αλλά μάλλον τους βοηθά και τους καθοδηγεί στην αναζήτησή της.

Αυτό το μοντέλο υποστηρίζει ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές εμπλέκονται στην αυθεντική μάθηση με ευκαιρίες να εξερευνήσουν και να επεκτείνουν τις γνώσεις τους, να εμπλουτίσουν τις εμπειρίες, να ρωτούν, να αναζητούν απαντήσεις, να κατανοούν την πολυπλοκότητα του κόσμου. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ενδιαφέρον και τα παιδιά οδηγούνται στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων αναζητώντας απάντηση σε ερωτήματα με το δικό τους ρυθμό και σύμφωνα με τις δικές τους ανάγκες, συνδυάζοντας γνώσεις από διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα.

Η ικανότητα του ατόμου να βρίσκει νέα λύση στο πρόβλημά του, βοηθά τα παιδιά να σκέφτονται την αιτία, να παίρνουν τις δικές τους αποφάσεις και να μαθαίνουν. Η μάθηση ως διαδικασία είναι ενεργητική και απαιτεί καλλιέργεια δεξιοτήτων, όπως ενημέρωση, παρατήρηση, σύγκριση, συσχέτιση πληροφοριών, ταξινόμηση, έρευνα, διατύπωση ερωτήσεων, αξιολόγηση, εξαγωγή συμπερασμάτων, λήψη αποφάσεων, ανάπτυξη κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Εξερευνώντας, πειραματιζόμενα, δοκιμάζοντας τις υποθέσεις και τελικά επιλύοντας προβλήματα τα παιδιά κάνουν τη μάθηση δική τους διαδικασία γεμάτη νόημα. Ο Piaget υποστήριζε ότι τα παιδιά κατανοούν ότι τα ίδια ανακαλύπτουν ή επινοούν. Η ανακάλυψη μέσα από τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος αποτελεί επομένως το όχημα για τη μάθηση των παιδιών. Τα προβλήματα που ευνοούν την ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων είναι συνήθως αυτά που δεν απαιτούν μια και μοναδική λύση, αλλά αποτελούν πρόκληση για έρευνα, συζήτηση και ομαδική εργασία των παιδιών.

Οι δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος που ενθαρρύνουν την έρευνα και την αιτιολόγηση, είναι ανοιχτές δραστηριότητες, οι οποίες κάνουν χρήση ποικιλίας πηγών, επιδέχονται περισσότερες της μιας λύσης, εξυπηρετούν την ανάπτυξη πολλαπλής νοημοσύνης και επιτρέπουν λάθη και ελεύθερες επιλογές. Η δόμηση της γνώσης μέσω λαθών αποτελεί μέρος της φυσικής διαδικασίας επίλυσης προβλήματος.

Τι μαθαίνουν τα παιδιά επιλύοντας προβλήματα;

Υιοθετώντας τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος εφοδιάζουμε τα παιδιά με δεξιότητες χρήσιμες για δια βίου μάθηση. Η συνεργασία για επίλυση προβλήματος ενισχύει τις κοινωνικές και διαπροσωπικές δεξιότητες μέσω του τρόπου αλληλεπίδρασης με συνομήλικους, ενήλικες, μέλη ευρύτερης κοινότητας για την επίτευξη ενός κοινού σκοπού. Αυτή η σχέση προϋποθέτει δέσμευση για ορισμό αμοιβαίου στόχου, κοινή στρατηγική, μοίρασμα ευθύνης για την εφαρμογή συνεργασίας, δουλειά σε ομάδες, ανάπτυξη δεξιοτήτων αιτιολόγησης, ανακάλυψης και δημιουργικής σκέψης για να μπορούν να αντιμετωπίζουν δύσκολες καταστάσεις και να διαχειρίζονται τη ζωή τους αποτελεσματικά. Έρευνες έχουν δείξει την προσφορά της συνεργασίας για επίλυση προβλήματος στη γνωστική ανάπτυξη των παιδιών. Η συνεργασία για επίλυση προβλήματος κινητοποιεί τους συμμετέχοντες και είναι αποτελεσματική όταν τα παιδιά μοιράζονται έναν σκοπό και έχουν διαφορετικές απόψεις για τον τρόπο που θα τον εκπληρώσουν. Αυτή η διαφορά των απόψεων στην προσπάθεια να πετύχουν τον κοινό στόχο, οδηγεί στη γνωστική ανάπτυξη και κάνει τη μάθηση ελκυστική.

Η επίλυση προβλήματος αποτελεί μια αρχή στην κατεύθυνση της αυτορυθμιζόμενης μάθησης, η οποία ενισχύει την ανεξαρτησία και την αυτοεκτίμηση. Αναγνωρίζει τις διαφορετικές ανάγκες των παιδιών δίνοντάς τους ευκαιρίες να αναπτυχθούν με το δικό τους ρυθμό και μπορεί να οδηγήσει στην αυτονομία η οποία αποτελεί το ευρύτερο πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν τα άτομα να ορίσουν τον εαυτό τους, πράγμα απαραίτητο για την ανάπτυξη της προσωπικότητάς τους, είτε αναφέρονται σε ατομικό είτε σε κοινωνικό επίπεδο. Η μάθηση μέσου επίλυσης προβλήματος αντανακλά στόχους αυθεντικούς που συνδέονται με την πραγματική ζωή, ενθαρρύνει τους μαθητές να γίνονται ενεργητικά μέλη, ανταποκρίνεται στα ενδιαφέροντα των μαθητών και οδηγεί σε διερευνητική μάθηση, όπου εμπλέκονται πολλές και διαφορετικές γνωστικές περιοχές.

Τρόποι ενθάρρυνσης επίλυσης προβλήματος

1. Αξιοποίηση ευκαιριών της καθημερινής ζωής

Η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στον πυρήνα πολλών αποφάσεων που καλείται το παιδί να αντιμετωπίσει. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών μέσω της επίλυσης προβλήματος, αξιοποιώντας ευκαιρίες που προκύπτουν καθημερινά στην τάξη ή επινοώντας οι ίδιοι προβλήματα που προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών.

Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί σημαντικό θέμα στη μαθηματική εκπαίδευση με προβλήματα που αναπαριστούν πραγματικά σενάρια από τη ζωή. Η Αμερικανική Ένωση Ανάπτυξης Επιστημών τονίζει τη σπουδαιότητα της εμπλοκής των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και δραστηριοτήτων που αντανακλούν εμπειρίες με νόημα. Η διαδικασία σκέψης μέσα από ένα πρόβλημα και η αναζήτηση λύσης είναι πολύ πιο σημαντική από άλλες παραδοσιακές μαθηματικές δραστηριότητες, όπως π.χ. η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων.

Όταν ερευνούμε προβλήματα που συνδέονται με την πραγματική ζωή, η ενσωμάτωση αναλυτικού προγράμματος στη μάθηση είναι φανερή και άμεση. Μέσω της διαθεματικής διδασκαλίας και μάθησης τα παιδιά αποκτούν βασικές δεξιότητες από διάφορες γνωστικές περιοχές, τις οποίες μπορούν να χρησιμοποιούν και να αξιοποιούν από τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσής τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι στερούνται την κύρια γνώση κάθε γνωστικού αντικειμένου.

Η εμπλοκή σε μάθηση με νόημα δίνει στα παιδιά την ευκαιρία να επεκτείνουν και να συνδέουν συγκεκριμένη γνώση με το περιεχόμενο των προβλημάτων. Η λύση προβλημάτων που στηρίζονται σε αληθινά γεγονότα βοηθά τα παιδιά όχι μόνο να δουν τη σκοπιμότητα της δραστηριότητας, αλλά και να διαπιστώσουν στην πράξη πώς μπορεί κανείς να προσεγγίσει προβλήματα της ζωής. Η διαδικασία επίλυσης είναι αναπτυξιακή από τη φύση της, καθώς τα άτομα αντιλαμβάνονται τα προβλήματα με βάση το δικό τους υπόβαθρο και αναπτυξιακό επίπεδο.

2. Υποβολή και διατύπωση ερωτήσεων από και προς τους μαθητές

Η ζωή είναι μια διαδικασία επίλυσης προβλημάτων που για να λυθούν αποτελεσματικά χρειάζεται η διατύπωση ερωτήσεων. Με την υποβολή ερωτήσεων το άτομο προσεγγίζει διάφορα θέματα και προβλήματα, κατανοεί πολύπλοκες καταστάσεις, διακρίνει τι είναι σημαντικό και τι όχι, βελτιώνει τις δεξιότητες σκέψης, αυξάνει τη μαθητική περιέργεια και καθοδηγεί τη μάθησή του μέσα από την ανακάλυψη και την αυτενέργεια. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ενθαρρύνει τα παιδιά υποβάλλοντας ερωτήσεις που εκφράζουν αυθεντική περιέργεια και ενδιαφέρον για τον τρόπο που σκέφτονται γύρω από τις εμπειρίες τους και να φροντίζει ώστε οι ερωτήσεις του να κεντρίζουν το ενδιαφέρον και την περιέργεια των παιδιών, να τα φέρνουν αντιμέτωπα με θεωρίες, γνώσεις, απόψεις και αντιλήψεις που διαφέρουν από τις δικές τους, να τα βοηθούν να στοχάζονται τις εμπειρίες τους και να μαθαίνουν από αυτές.

Με τις ερωτήσεις ο εκπαιδευτικός προσελκύει το ενδιαφέρον των παιδιών σε πράγματα που συμβαίνουν γύρω τους, τα ενθαρρύνει να συγκεντρωθούν σε αυτά που ακούν, τα βάζει σε μια διαδικασία επεξεργασίας και στοχασμού αυτών που βλέπουν ή κάνουν, ενεργοποιεί γνωστικές λειτουργίες όπως να συνθέτουν, να ερμηνεύουν, να αναλύουν ή να γενικεύουν υποθέσεις για αυτό που κάνουν, να προβλέπουν, να πειραματίζονται, να εξηγούν τις ιδέες τους, να περιγράφουν τα σχέδια τους και τελικά να χαίρονται τη μάθηση. Οι ερωτήσεις δίνουν τη δυνατότητα στο παιδί να σκεφθεί, να συνδυάσει αυτά που γνωρίζει και να δώσει δημιουργικές λύσεις σε καινούρια προβλήματα και καταστάσεις, μετατρέποντας στιγμές ρουτίνας σε διδακτικές στιγμές.

Με την υποβολή ανοιχτών ερωτήσεων διευκολύνουμε τις συζητήσεις των παιδιών, τα ενθαρρύνουμε να εκφράσουν τις απόψεις τους, να διατυπώνουν πιθανές λύσεις, να δοκιμάζουν και να αιτιολογούν τις συνέπειες, να επαναπροσδιορίζουν το πρόβλημα, να στοχάζονται τις εμπειρίες τους, να κάνουν υποθέσεις, να αξιολογήσουν καταστάσεις και γεγονότα. Όσο περισσότερο αντιμετωπίζει κανείς τα παιδιά ως ισότιμους συνομιλητές και εμπιστεύεται την ικανότητά τους να εκφέρουν γνώμη που θα μπορούσε να συμβάλλει στην επίλυση προβλήματος, τόσο επιτυχέστερα μαθαίνουν να δρουν και να αποφασίζουν.

Προϋποθέσεις και τρόποι προσέγγισης του προβλήματος

Για να μπορέσουν τα παιδιά να εμπλακούν στην επίλυση ενός προβλήματος πρέπει το πρόβλημα να είναι συγκεκριμένο, κατάλληλο για το αναπτυξιακό επίπεδο και τις νοητικές ικανότητες τους, να προκαλεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια τους, να μπορεί να προσεγγιστεί και να επιλυθεί με διαφορετικούς τρόπους, ενώ τα παιδιά θα πρέπει να διαθέτουν κάποιες γνώσεις για το θέμα που θα ασχοληθούν και να υπάρχει ένα πλαίσιο γύρω από το οποίο θα δομηθούν οι δράσεις.

Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος βασίζεται στην κατανόηση και υιοθέτηση ορισμένων βημάτων, όπως :

- Ορισμός του προβλήματος. Το άτομο που επιλύει ένα πρόβλημα αρχικά χρειάζεται να το αναγνωρίσει. Συχνά η αναγνώριση των δεδομένων του προβλήματος εμπεριέχει δυσκολίες.

- Καταιγισμός ιδεών για την επίλυση. Ο καταιγισμός ιδεών προσφέρει στα παιδιά ευκαιρίες να συζητήσουν, να διαπραγματευτούν, να αναπτύξουν συνεργατικές δεξιότητες.

- Αναζήτηση εναλλακτικών τρόπων, επιλογή μιας λύσης και προσπάθεια εφαρμογής. Επιλέγοντας και ακολουθώντας ένα δρόμο, μια επιλογή για τη λύση του προβλήματος, τα παιδιά συναινούν και μοιράζονται την ευθύνη της απόφασης. Πρόκειται για μια πολύτιμη μάθηση σε μια δημοκρατική κοινωνία.

- Αξιολόγηση των επιλογών και αιτιολόγηση του τι συνέβη. Αξιολογώντας τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος τα παιδιά αναγνωρίζουν τις επιλογές και τα λάθη τους και μαθαίνουν να εκτιμούν τη δουλειά τους.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος

Οι εκπαιδευτικοί εκμεταλλευόμενοι την τάση των παιδιών να ρωτούν ακατάπαυστα τι, πώς και γιατί προκειμένου να γνωρίσουν και να κατανοήσουν πτυχές του προβλήματος, μπορούν να διευκολύνουν τα παιδιά υποβάλλοντας κατάλληλες ερωτήσεις. Το σημαντικό είναι να είναι διαθέσιμοι και να παρατηρούν και να αξιοποιούν κατάλληλα αυτά που συμβαίνουν στην τάξη. Στην κατεύθυνση αυτή μπορούν να ενθαρρύνουν τα παιδιά να αλληλεπιδρούν και να μοιράζονται διαφορετικές απόψεις στη διάρκεια δραστηριοτήτων αναλαμβάνοντας πρωτοβουλίες όπως:

- να βοηθούν τα παιδιά να ξεκαθαρίζουν εξαρχής τους στόχους και το σκοπό κάθε δραστηριότητας. Στην κατεύθυνση αυτή μπορούν να υπενθυμίζουν στα παιδιά τι προσπαθούν να πετύχουν προτού ξεκινήσουν την προσπάθεια,

- να τα ενθαρρύνουν να συμμετέχουν βοηθώντας τα να εκφράσουν τις απόψεις τους για το πρόβλημα,

- να οργανώνουν δραστηριότητες στις οποίες τα παιδιά δεν δουλεύουν απλώς πλάι-πλάι, αλλά μοιράζονται ένα στόχο, συζητώντας τις ιδέες τους για το πρόβλημα και συμφωνώντας για τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν,

- να βεβαιώνονται ότι ο κοινός στόχος, το πρόβλημα, κινητοποιεί το ενδιαφέρον των παιδιών και να τα εμπλέκουν σε δραστηριότητες που προσφέρουν πολλές δυνατότητες για την εκπλήρωση των στόχων τους,

- να προτρέπουν τα παιδιά να ενεργούν σε αντικείμενα, να παρατηρούν τα αποτελέσματα των ενεργειών τους και να αναρωτιούνται γιατί δεν πέτυχαν το στόχο τους ή πως θα τον πετύχουν,

- να ενθαρρύνουν τα παιδιά να αλληλεπιδρούν και να υιοθετούν και άλλες απόψεις, συστήνοντας ανοιχτές δραστηριότητες που επιδέχονται διαφορετικές προσωπικές ερμηνείες και απαντήσεις, προκειμένου να δίνεται η δυνατότητα στο κάθε παιδί να προσεγγίσει την αναπτυσσόμενη δραστηριότητα από τη δική του οπτική και σύμφωνα με τις δικές του δυνατότητες. Στο πλαίσιο αυτό θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να μη δίνουν άμεσα απάντηση στα ερωτήματα των παιδιών, αλλά να τα προτρέπουν να βρουν μόνα τους μια λύση κινητοποιώντας τα με εκφράσεις όπως: *τι μπορείτε να κάνετε για να το βρείτε; ρώτησε τα παιδιά της ομάδας σου αν συμφωνούν, τι συνέβη; τι θα άλλαζες; τι άλλο θα προσπαθούσες να κάνεις; τι θα γινόταν αν, γιατί συνέβη αυτό, τι θα έκανες διαφορετικό την επόμενη φορά, τι έμαθες, πως αισθάνεσαι; τι θα συμβεί αν, ποιους άλλους τρόπους μπορείς να σκεφτείς,*

- να εμπλέκουν στη διαδικασία παιδιά που δεν αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες,
- να επιτρέπουν στα παιδιά να κάνουν λάθη στην προσπάθειά τους να ανακαλύψουν τα ίδια τη γνώση,
- να μην επιδεικνύουν τρόπους επίλυσης του προβλήματος στα παιδιά. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι το να φτάσουν τα παιδιά κοντά στη σωστή λύση είναι λιγότερο σημαντικό για τη γνωστική τους ανάπτυξη, από τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Όταν ο εκπαιδευτικός θέτει στα παιδιά καθημερινά προβλήματα και συζητά τις λύσεις μαζί τους, τα παιδιά καταλαβαίνουν τη σπουδαιότητα αυτής της διαδικασίας. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι σημαντικός και διττός σε αυτή την κατεύθυνση, αρχικά να εκτιμήσει τη διαδικασία και να είναι πρόθυμος να εμπιστευτεί το μαθητή και στη συνέχεια να οργανώσει ένα μαθησιακό περιβάλλον που ενθαρρύνει την επίλυση του προβλήματος. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι και ο ίδιος πρόθυμος να μάθει, να είναι περίεργος, παρατηρητικός, να ρωτά, να ακούει και να μοιράζεται ιδέες. Όταν ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει προβλήματα, τα οποία τα παιδιά με διαφορετικά αναπτυξιακά επίπεδα επιχειρούν να προσεγγίσουν εργαζόμενα από κοινού, όταν ενθαρρύνει τις προσπάθειές τους και την ανταλλαγή διαφορετικών απόψεων και τα βοηθά να φτάσουν στον αντικειμενικό τους στόχο, τότε η συνεργασία για επίλυση προβλήματος γίνεται ένα ευχάριστο και αποτελεσματικό μέρος του αναλυτικού προγράμματος, όπου τα παιδιά βλέπουν τα αποτελέσματα των ενεργειών τους και κινητοποιούνται στο να δοκιμάσουν και άλλες στρατηγικές.

Ο εκπαιδευτικός, ο οποίος επιλέγει να δουλέψει με αυτόν τον τρόπο και με ομάδες παιδιών, σέβεται και αποδέχεται τις απόψεις, τα συναισθήματα και τις ιδέες των παιδιών. Δεν επιβάλλει την αυθεντία του, αλλά χρησιμοποιεί την ιδιότητά του προσφέροντας στα παιδιά ευκαιρίες να είναι ενεργητικά, δημιουργικά, γεμάτα απορίες και να δομούν σταδιακά την προσωπικότητά τους, έχοντας αυτοπεποίθηση και σεβασμό για τους άλλους και τον εαυτό τους. Επειδή αντικειμενικός σκοπός της συνεργασίας για επίλυση προβλήματος είναι να μοιράζεται κάποιος διαφορετικές απόψεις, είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να επιζητά τη συνεργασία κι όχι την υπακοή των παιδιών, να ρωτά και να μην λέει, να προτείνει μάλλον και να μην απαιτεί, να πείθει παρά να ελέγχει, να ενθαρρύνει τα παιδιά να αυτορυθμίζουν τη συμπεριφορά τους και να λειτουργούν αυτόνομα.

Κεφάλαιο ΙΙ:

ΕΥΡΕΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ – GEORGE POLYA

Η Μαστοριά της Ανακάλυψης στον Polya

Ο George Polya (1888-1987) πίστευε ότι υπάρχει μια τέχνη της ανακάλυψης, ότι η ικανότητα να ανακαλύπτεις και η ικανότητα να επινοείς μπορούν να ενισχυθούν με την επιδέξια διδασκαλία, η οποία κινητοποιεί το μαθητή στις αρχές της ανακάλυψης και του δίνει μια ευκαιρία να ασκήσει αυτές τις αρχές.

Σε μια σειρά αξιόλογα και πολύ πλούσια βιβλία, το πρώτο από τα οποία εκδόθηκε στα 1945, ο Polya αποκρυστάλλωσε αυτές τις αρχές της ανακάλυψης και της επινόησης και τις εξέθεσε με διδάγματα και παραδείγματα. Τα βιβλία αυτά περιέχουν στρατηγική, μεθοδολογία, εμπειρικούς κανόνες, καλές συμβουλές, ανέκδοτα, μαθηματική ιστορία, μαζί με προβλήματα που διαδέχονται το ένα το άλλο σε όλα τα επίπεδα, όλα ασυνήθιστου μαθηματικού ενδιαφέροντος. Ο Polya παραθέτει ένα σφαιρικό σχέδιο για το ***Πώς να το λύσεις***, στις τελευταίες σελίδες του ομώνυμου βιβλίου του

ΠΩΣ ΝΑ ΤΟ ΛΥΣΕΙΣ

Πρώτον: Πρέπει να ***κατανοήσεις*** το πρόβλημα
Δεύτερον: Βρες τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και στο άγνωστο. Ίσως να είσαι υποχρεωμένος να εξετάσεις βοηθητικά προβλήματα, αν δεν μπορεί να βρεθεί μια άμεση σχέση. Τελικά θα πρέπει να βρεις ένα ***σχέδιο*** για τη λύση
Τρίτον: ***Εκτέλεσε*** το σχέδιο σου
Τέταρτον: ***Εξέτασε*** τη λύση που βρήκες

Για παράδειγμα:

- Αν δεν μπορείς να λύσεις το προτεινόμενο πρόβλημα, ψάξε για ένα κατάλληλο πρόβλημα που είναι σχετικό
- Δούλεψε προς τα πίσω
- Δούλεψε προς τα εμπρός
- Περιόρισε τις συνθήκες
- Διεύρυνε τις συνθήκες
- Ψάξε για ένα αντίθετο παράδειγμα
- Διαίρει και βασίλευε
- Άλλαξε τον τρόπο σύλληψης της έννοιας

Οι μετέπειτα ερευνητές προώθησαν τις ιδέες του Polya με διάφορους τρόπους.
Ο A. H. Schoenfeld έκανε μια ενδιαφέρουσα ταξινόμηση των ευρετικών αρχών που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά κολεγιακού επιπέδου.

ΕΥΡΕΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΥΧΝΑ
(A. H. Schoenfeld)

Ανάλυση

1) ΣΧΕΔΙΑΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ αν είναι δυνατόν

2) ΕΞΕΤΑΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

α) Διάλεξε ειδικές τιμές που θα δείξουν με παραδείγματα το πρόβλημα και «νιώσε» το

β) Εξέτασε οριακές περιπτώσεις για να ερευνήσεις την κλίμακα των πιθανοτήτων

γ) Δώσε σε ακέραιες παραμέτρους τις τιμές 1, 2, 3, …, στη σειρά και ψάξε για κάποιο επαγωγικό σχήμα

3) ΠΡΟΣΠΑΘΗΣΕ ΝΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

α) αξιοποιώντας τη συμμετρία ή

β) με επιχειρήματα που θα στηρίζονται στην αρχή «Χωρίς βλάβη της Γενικότητας» (στα οποία περιλαμβάνεται και η αλλαγή κλίμακας)

Διερεύνηση

1) ΕΞΕΤΑΣΕ ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) αντικαθιστώντας συνθήκες με άλλες ισοδύναμες

β) συνδυάζοντας εκ νέου τα στοιχεία του προβλήματος με διαφορετικό τρόπο

γ) εισάγοντας βοηθητικά στοιχεία

δ) αναδιατυπώνοντας το πρόβλημα με

ι) αλλαγή της σκοπιάς ή του συμβολισμού

ιι) εξέταση των επιχειρημάτων με αντίθετο ή αντιστροφή

ιιι) την υπόθεση ότι έχεις μια λύση και καθορίζοντας τις ιδιότητές της

2) ΕΞΕΤΑΣΕ ΕΛΑΦΡΑ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

α) Διάλεξε μικρότερους στόχους (πέτυχε μια μερική εκπλήρωση των συνθηκών) β) Μετρίασε μια συνθήκη και προσπάθησε να την επαναφέρεις

γ) Αποσύνθεσε τα δεδομένα του προβλήματος και εξέτασε κάθε περίπτωση χωριστά

3) ΕΞΕΤΑΣΕ ΠΟΛΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

α) Δημιούργησε ένα ανάλογο πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές

β) Κράτησε μόνο μια μεταβλητή σταθερή για να μελετήσεις την επίδρασή της

γ) προσπάθησε να εκμεταλλευτείς οποιοδήποτε σχετικό πρόβλημα το οποίο είναι παρόμοιο

ι) στη μορφή

ιι) στα δεδομένα

ιιι) στα συμπεράσματα

Να θυμάσαι: Όταν ασχολείσαι με σχετικά προβλήματα που είναι πιο εύκολα, θα πρέπει να προσπαθείς να εκμεταλλευτείς τόσο το ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ όσο και τη ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ για το δεδομένο πρόβλημα

Επαληθεύοντας τη λύση σου

1) ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ Η ΛΥΣΗ ΣΟΥ ΑΥΤΑ ΤΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ;

α) Χρησιμοποιεί όλα τα συναφή δεδομένα;

β) Συμμορφώνεται με τις λογικές εκτιμήσεις ή τις προβλέψεις;

γ) Αντέχει στις δοκιμασίες της συμμετρίας, της διαστατικής ανάλυσης ή της αλλαγής κλίμακας;

2) ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΑΥΤΑ ΤΑ ΓΕΝΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ;

α) Μπορεί να γίνει διαφορετικά;

β) Μπορεί να τεκμηριωθεί με ειδικές περιπτώσεις;

γ) Μπορεί να αναχθεί σε γνωστά αποτελέσματα;

δ) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δημιουργήσει κάτι γνωστό σου;

Για να δοθεί μια γεύση της σκέψης και της γραφής του Polya, ακολουθούν τρία προβλήματα από το βιβλίο του *How To Solve It,* επιλεγμένα ώστε να είναι κατάλληλα για μαθητές Α΄ Λυκείου που διδάσκονται Άλγεβρα.

1ο Πρόβλημα:

Ο Γιώργος έχει 10 θήκες και 44 κέρματα του ενός ευρώ. Θέλει να τοποθετήσει τα ευρώ του με τέτοιον τρόπο, έτσι ώστε κάθε θήκη να περιέχει ένα διαφορετικό αριθμό κερμάτων. Μπορεί να γίνει αυτό;

Η Συμβουλή – Υπόδειξη:

Αν ο Γιώργος είχε πάρα πολλά κέρματα του ενός ευρώ, προφανώς δε θα είχε καμία δυσκολία στο να γεμίσει κάθε μία από τις θήκες του με διαφορετικό αριθμό κερμάτων.
«Μπορείς να επανεκκινήσεις το πρόβλημα;» Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κερμάτων τον οποίο μπορεί να τοποθετήσει στις 10 θήκες, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο διαφορετικές θήκες που να περιέχουν το ίδιο ποσό;

Επίλυση:

Ο ελάχιστος δυνατός αριθμός κερμάτων σε μία θήκη είναι προφανώς μηδέν (0). Ο επόμενος μεγαλύτερος αριθμός είναι το λιγότερο ένα (1), ο αμέσως επόμενος μεγαλύτερος είναι το λιγότερο δύο (2), … και ο αριθμός στην τελευταία – 10η θήκη, είναι το λιγότερο εννέα (9). Ως εκ τούτου, ο συνολικός αριθμός των κερμάτων του ενός ευρώ που απαιτούνται, είναι τουλάχιστον:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$$

Απάντηση:

Ο Γιώργος δεν μπορεί να το κάνει. Έχει μόνο 44 ευρώ.

2ο Πρόβλημα:

Τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου και τρεις άλλοι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου.
Αν προσθέσουμε τους αντίστοιχους όρους των δύο προόδων προκύπτουν οι εξής διαδοχικοί αριθμοί: 85, 76, 84
Αν προσθέσουμε και τους τρεις όρους της αριθμητικής προόδου προκύπτει: 126
Να βρεθούν οι όροι και των τριών προόδων

Η Συμβουλή – Υπόδειξη :

Να διαχωρίσετε τα διάφορα μέρη της συνθήκης. Μπορείτε να τα καταγράψετε.
Ας θεωρήσουμε:

$$x-\omega,\ \ x,\ \ x+\omega \quad \text{και} \quad \frac{\psi}{\lambda},\ \ \psi,\ \ \psi\cdot\lambda$$

αντίστοιχα τους όρους της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου.

Η Λύση:

Η συνθήκη διαχωρίζεται εύκολα σε τέσσερεις εξισώσεις:

$$x-\omega+\frac{\psi}{\lambda}=85$$

$$x+\psi=76$$

$$x+\omega+\psi\cdot\lambda=84$$

$$3x=126$$

Επιλύοντας την τελευταία έχουμε $x=42$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει $\psi=34$

Στη συνέχεια προσθέτουμε τις άλλες δύο εξισώσεις, απαλείφεται το ω, και καταλήγουμε σε μία δευτεροβάθμια ως προς λ εξίσωση:

$$34\lambda^2-85\lambda+34=0$$

Οι λύσεις της είναι: $\lambda=2,$ επομένως $\omega=-26$ και $\lambda=\frac{1}{2},$ επομένως $\omega=25$

Επομένως οι πρόοδοι είναι:

68, 42, 16   17, 42, 67

ή

17, 34, 68   68, 34, 17

<u>3ο Πρόβλημα:</u>

Από όλα τα τετράπλευρα με δεδομένη περίμετρο, βρείτε αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Ποιό είναι το ζητούμενο; Ένα τετράπλευρο

Ποια είναι τα δεδομένα; Δίνεται η περίμετρος του τετραπλεύρου

Ποια είναι η συνθήκη; Το ζητούμενο τετράπλευρο θα πρέπει να έχει μεγαλύτερο εμβαδό από οποιοδήποτε άλλο τετράπλευρο με την ίδια περίμετρο

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι πολύ διαφορετικό από τα συνηθισμένα προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και επομένως είναι φυσικό να αρχίσουμε να κάνουμε εικασίες.

Ποιο τετράπλευρο είναι πιθανό να έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Ποια θα ήταν η πιο απλή εικασία; Μπορεί να έχουμε ακούσει ότι από όλα τα σχήματα με την ίδια περίμετρο, ο κύκλος έχει το μεγαλύτερο εμβαδό. Μπορούμε ακόμα να υποψιαστούμε γιατί αυτός ο ισχυρισμός είναι εύλογος. Επομένως, ποιο τετράπλευρο πλησιάζει περισσότερο τον κύκλο; Ποιο πλησιάζει περισσότερο στη συμμετρία του κύκλου;

Το τετράγωνο είναι μία μάλλον εύλογη εικασία. Αν πάρουμε σοβαρά αυτήν την υπόθεση, θα πρέπει να αντιληφθούμε τι σημαίνει. Θα πρέπει να έχουμε το θάρρος να το διατυπώσουμε:
«Από όλα τα τετράπλευρα με δεδομένη περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό»
Αν αποφασίσουμε να εξετάσουμε αυτόν τον ισχυρισμό, η κατάσταση αλλάζει.
Αρχικά είχαμε «ένα πρόβλημα εύρεσης».
Μετά τη διατύπωση της εικασίας μας, έχουμε « ένα πρόβλημα απόδειξης ».
Πρέπει να αποδείξουμε ή να απορρίψουμε το θεώρημα που διατυπώσαμε.

Αν δε γνωρίζουμε κανένα πρόβλημα παρόμοιο με το δικό μας που να έχει λυθεί προηγουμένως, τότε τα πράγματα είναι αρκετά δύσκολα.
Αν δεν μπορείτε να λύσετε το προτεινόμενο πρόβλημα, να προσπαθήσετε να λύσετε πρώτα κάποιο σχετικό πρόβλημα. Θα μπορούσατε να λύσετε ένα μέρος του προβλήματος;
Μπορούμε να σκεφθούμε ότι αφού το τετράγωνο έχει μια προνομιούχο θέση ανάμεσα στα τετράπλευρα, θα είναι «προνομιούχο» επίσης και ανάμεσα στα ορθογώνια. Ένα μέρος του προβλήματός μας θα λυνόταν, αν κατορθώναμε να αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό:

«Από όλα τα ορθογώνια με δεδομένη περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό»

Αυτό το θεώρημα φαίνεται περισσότερο προσιτό από το προηγούμενο. Προφανώς όμως δεν είναι τόσο ισχυρό. Οπωσδήποτε όμως, θα πρέπει να κατανοήσουμε καλά τι εννοεί. Θα πρέπει να έχουμε το θάρρος να το επαναδιατυπώσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες. Μπορούμε να το επαναδιατυπώσουμε με τη ***γλώσσα της Άλγεβρας***, με τέτοιο τρόπο ώστε να επωφεληθούμε.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαδοχικές πλευρές α και β, είναι: $E = \alpha \cdot \beta$
Η περίμετρος του είναι: Π = $2\alpha + 2\beta$.
Η κάθε πλευρά του τετραγώνου που έχει την ίδια περίμετρο με το ορθογώνιο που αναφέραμε είναι: $\frac{\alpha+\beta}{2}$
Επομένως, το εμβαδόν αυτού του τετραγώνου είναι: $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$
Θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου και έτσι θα έχουμε

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 > \alpha\beta$$

Ισχύει πράγματι αυτή η σχέση; Ο ίδιος ισχυρισμός μπορεί να γραφεί με την ισοδύναμη μορφή:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 > 4\alpha\beta$$

Ωστόσο, αυτή η σχέση ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 > 0$$

Ή με την

$$(\alpha - \beta)^2 > 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει σε κάθε περίπτωση, εκτός αν α = β, δηλαδή όταν το ορθογώνιο που εξετάζουμε είναι τετράγωνο.
Επομένως , από όλα τα ορθογώνια με δεδομένη περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό από όλα

Δεν έχουμε λύσει ακόμα το πρόβλημα μας, έχουμε όμως σημειώσει κάποια πρόοδο, αντιμετωπίζοντας δυναμικά τις μάλλον προφανείς υποθέσεις μας.

Κεφάλαιο ΙΙΙ:

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ: Ο ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιλογή του πρώτου προβλήματος έγινε από το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων και σχεδιάστηκε με στόχο να γίνει «ομαλά» η εισαγωγή της έννοιας του κλασικού ορισμού της πιθανότητας.

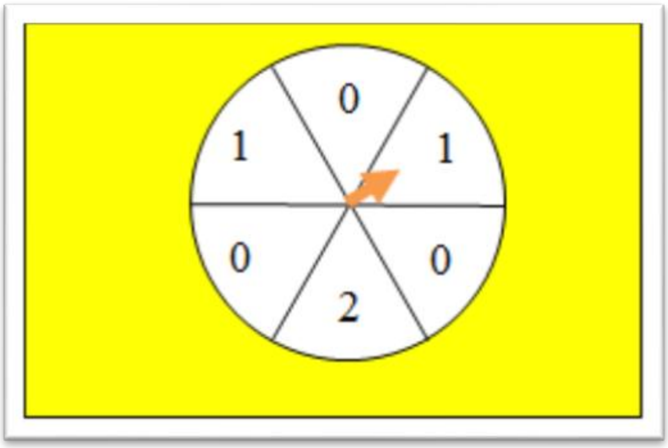
Πραγματοποιήθηκαν 4 διδασκαλίες σε ισάριθμα τμήματα της Α΄ Λυκείου (συμμετείχαν 85 μαθητές), τη μία εκ των οποίων παρακολούθησε η ολομέλεια του εργαστηρίου.

Ακολουθεί ένα σχέδιο μαθήματος, η παρουσίαση του φύλλου εργασίας που δόθηκε στους μαθητές καθώς και τα σχόλια των συναδέλφων που υλοποίησαν τις διδασκαλίες.

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Το πρόβλημα

Σε ένα λούνα πάρκ υπάρχει ο τροχός της τύχης που φαίνεται στο σχήμα. Όλα τα τόξα είναι ίσα και ο τροχός είναι αμερόληπτος. Για να παίξουμε πληρώνουμε 2 €. Αν με το γύρισμα του τροχού έρθει το **“0”** χάνουμε, αν έρθει το **“1”** παίρνουμε 3 €, ενώ αν έρθει το **“2”** παίρνουμε 4 €. Να εξετάσετε αν το παιχνίδι ευνοεί τον παίκτη ή τον ιδιοκτήτη



Βασική ιδέα:

Η βασική ιδέα είναι η προσπάθεια κινητοποίησης όλων των μαθητών μέσω ενός προβλήματος με το οποίο είναι εξοικειωμένοι, έτσι ώστε να γίνει ομαλότερα η εισαγωγή της έννοιας του κλασικού ορισμού της πιθανότητας. Για να εξυπηρετηθεί αυτός ο σκοπός έγινε μία προσαρμογή του αρχικού προβλήματος.

Στόχοι:

- Η προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας μέσω σύνδεσης με την καθημερινή εμπειρία
- Η οπτική της πιθανότητας πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου, ως το μέτρο της «προσδοκίας» με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του
- Ο συσχετισμός της έννοιας της σχετικής συχνότητας με την έννοια της πιθανότητας, όταν ο αριθμός των δοκιμών επαναλαμβάνεται απεριόριστα

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

Βασικές έννοιες στατιστικής, κλασμάτων και ποσοστών

Διάρκεια:

Δύο (2) διδακτικές ώρες

Ερμηνεία:

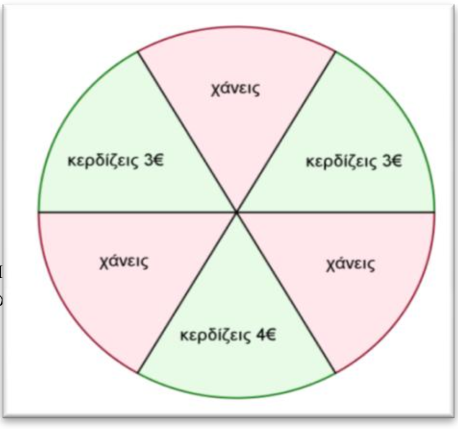
Γίνεται επίδειξη του πειράματος με έναν αληθινό τροχό τύχης ή με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού (βλ. συνημμένα)

Ακολουθεί ένα ενδεικτικό φύλλο εργασίας, το οποίο μοιράζεται στους μαθητές οι οποίοι είναι χωρισμένοι σε ομάδες. Υπάρχουν δύο δυνατότητες προσέγγισης:

1η : Οι μαθητές απαντούν στις ερωτήσεις μέσα σε εύλογο χρονικό διάστημα και στη συνέχεια γίνεται συζήτηση με τον εκπαιδευτικό σχετικά με τα συμπεράσματά τους

2η : Η συζήτηση γίνεται μετά από κάθε απάντηση ξεχωριστά

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>



Σε ένα λούνα πάρκ υπάρχει ο τροχός της τύχης που έχει έξι ίσους κυκλικούς τομείς. Σε τρεις από αυτούς υπάρχει η ένδειξη «χάνεις», σε άλλους δύο υπάρχει

η ένδειξη 3 € και σε έναν η ένδειξη 4 €.
Η συμμετοχή σε κάθε γύρο του τροχού είναι 2 €.
Από τις έως τώρα γνώσεις και εμπειρία σας να εκτιμήσετε:

1. την πιθανότητα σε μία προσπάθεια ο παίκτης να χάσει

   ……………………………………………………………………………………………………

2. την πιθανότητα σε μία προσπάθεια ο παίκτης να κερδίσει 3 €

   ……………………………………………………………………………………………………

3. την πιθανότητα σε μία προσπάθεια ο παίκτης να κερδίσει 4 €

   ……………………………………………………………………………………………………

4. αν ο παίκτης παίξει 30 φορές, πόσες φορές αναμένεται να χάσει

   ……………………………………………………………………………………………………

5. αν ο παίκτης παίξει 30 φορές, πόσες φορές αναμένεται να κερδίσει 3 €

   ……………………………………………………………………………………………………

6. αν ο παίκτης παίξει 30 φορές, πόσες φορές αναμένεται να κερδίσει 4 €

   ……………………………………………………………………………………………………

7. το συνολικό ποσό της συμμετοχής για 30 γυρίσματα του τροχού

   ……………………………………………………………………………………………………

8. ποιο ποσό αναμένεται να εισπράξει συνολικά αν παίξει 30 φορές

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

9. αν το παιχνίδι ευνοεί τον παίκτη ή τον ιδιοκτήτη

   ……………………………………………………………………………………………………

10. Να απαντήσετε αν είναι Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις (με αιτιολόγηση):

    α) «αν γυρίσουμε τον τροχό 6 συνεχόμενες φορές θα χάσουμε 3 φορές, θα κερδίσουμε από 3 € δύο φορές και 4 € μία φορά»

    ………

    ………

    β) «αν γυρίσουμε τον τροχό 10 φορές δεν είναι δυνατόν να χάσουμε και τις 10 φορές»

    ………

    ………

11. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω πρόταση:

«αν επαναλάβουμε το πείραμα 1000 (ή 10000, ή 100000 ή … όσο περισσότερες φορές μπορούμε) τότε η πιθανότητα να χάσουμε είναι ……………………………………… , η πιθανότητα να κερδίσουμε 3 € είναι ……………………

και η πιθανότητα να κερδίσουμε 4 € είναι …………………»

12. Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Πώς θα ορίζατε την έννοια της πιθανότητας;

  ………

  ………

- Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η πιθανότητα ενός ενδεχομένου;

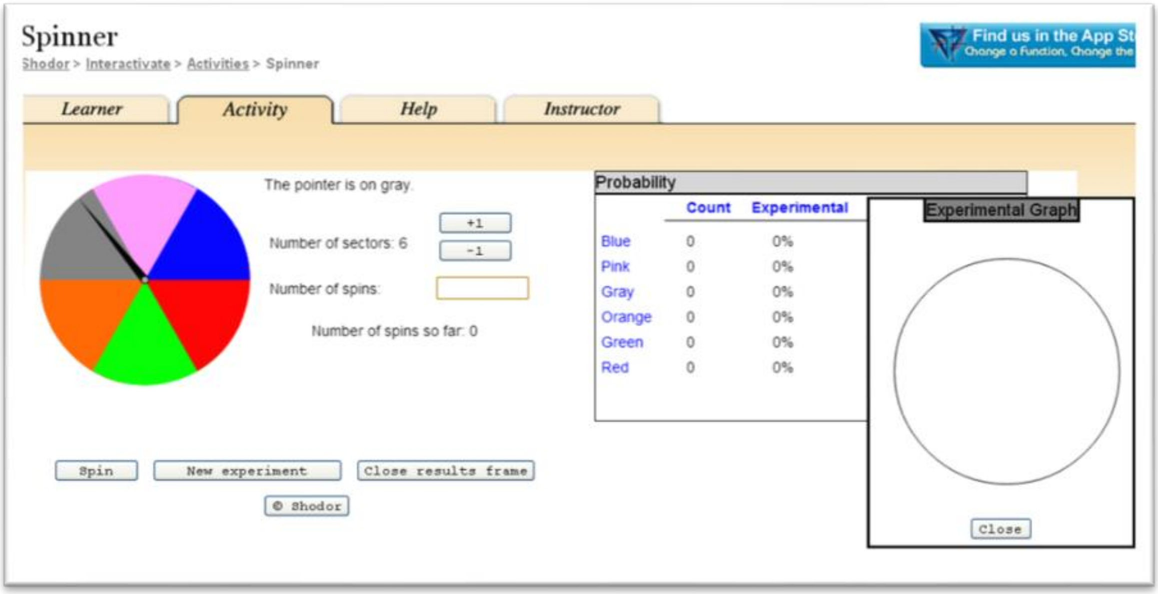
  ………

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΧΟΛΙΑ

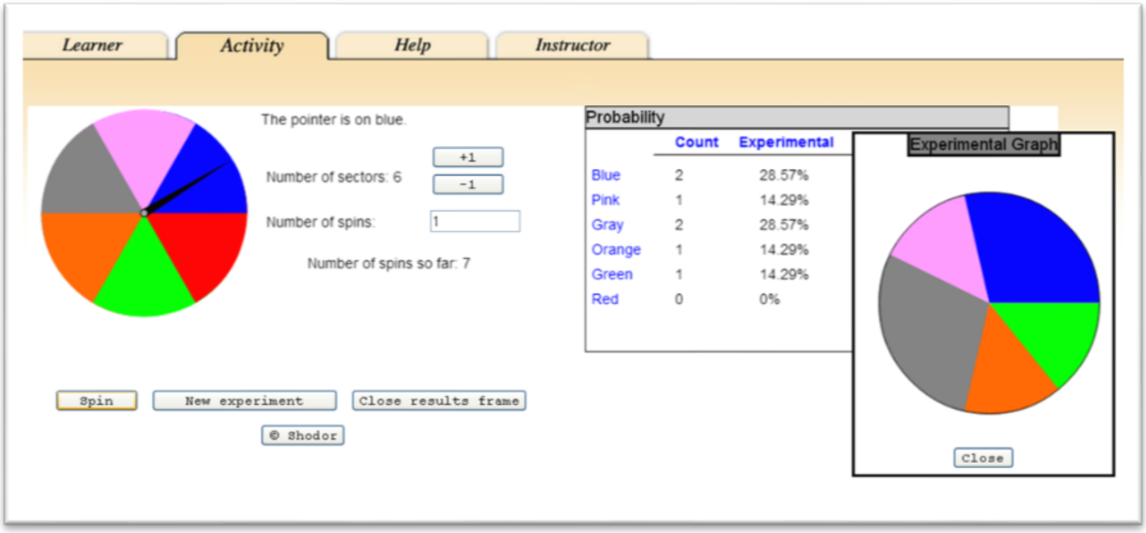
Α΄ ΜΕΡΟΣ:

Ακολουθούν τέσσερα στιγμιότυπα του τροχού της τύχης από το λογισμικό. Στο πρώτο φαίνεται η αρχική κατάσταση, στο δεύτερο τα αποτελέσματα μετά από 1 στροφή του τροχού, στο τρίτο μετά από 100 στροφές και στο τέταρτο μετά από 8000 στροφές

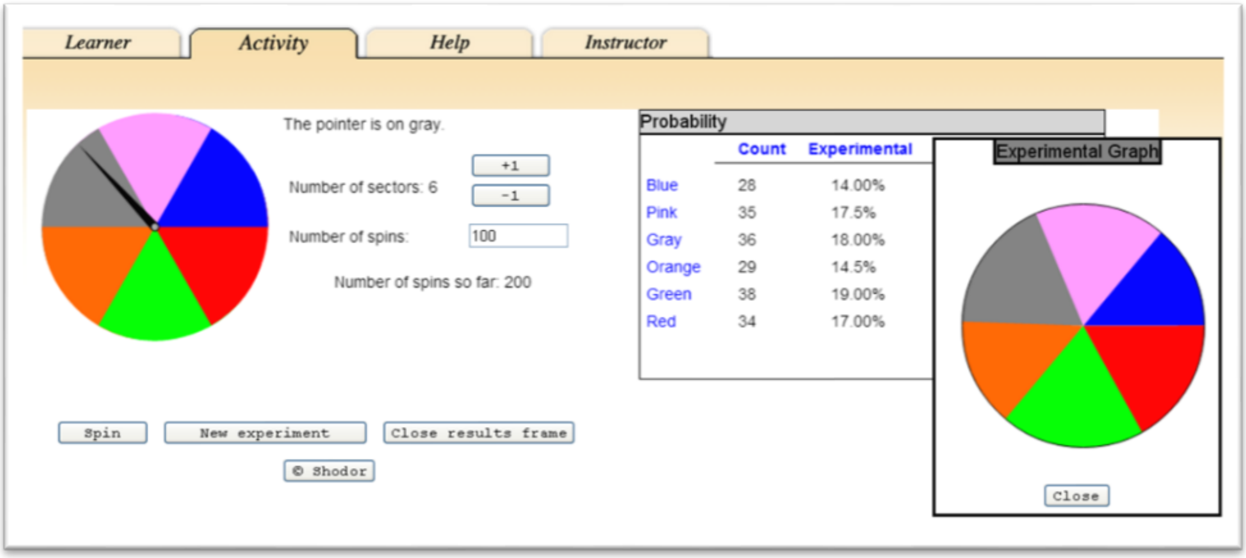
Αρχική κατάσταση:



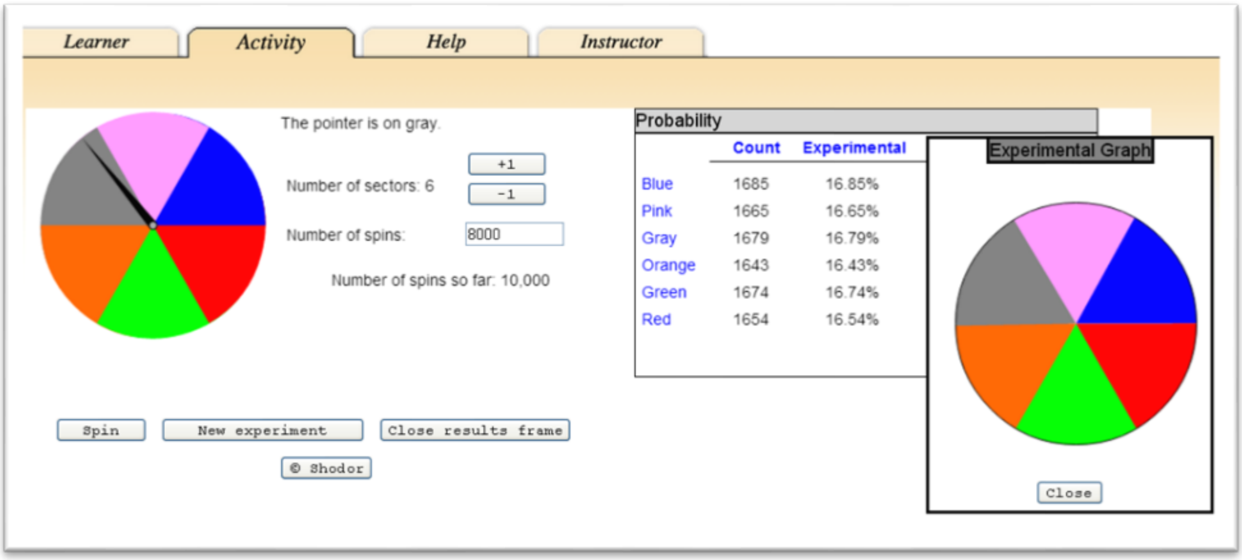
Μετά από 1 στροφή:



Μετά από 100 στροφές:



Μετά από 8000 στροφές:



<u>Β΄ ΜΕΡΟΣ:</u>

Ο στόχος του μαθήματος ήταν η λύση ενός προβλήματος στα Μαθηματικά με τη συνδρομή λογισμικού προσομοίωσης

(http://www.shodor.org/interactivate/activities/BasicSpinner/)

Χωρισμένοι οι μαθητές σε ομάδες και με τη χρήση σχετικού λογισμικού συμπλήρωσαν τα φύλλα εργασίας, ίδια για όλες τις ομάδες. Όλη την ώρα ενεπλάκησαν στην διαδικασία της διδασκαλίας του μαθήματος με συγκεκριμένους γνωστικούς αλλά και ιδιαίτερους παιδαγωγικούς στόχους

Αξιοσημείωτο είναι, ότι οι μαθητές – παρά το γεγονός ότι ένα μάθημα Άλγεβρας δεν ενδείκνυται την 7η ώρα του σχολικού προγράμματος και επιπλέον η παρουσία των συναδέλφων ενδεχομένως να είχε ανασταλτικό χαρακτήρα – επέδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την όλη διαδικασία και ανταποκρίθηκαν επιτυχώς στις απαιτήσεις των φύλλων εργασίας

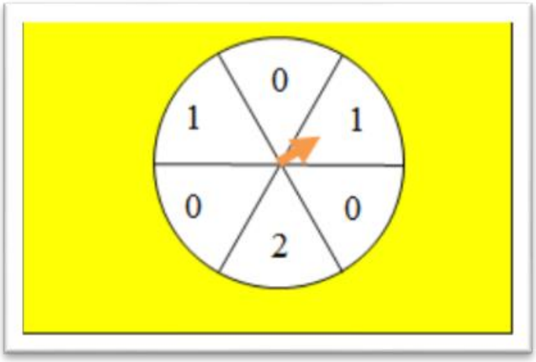
Οι μαθητές μετά το μάθημα έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την έννοια της πιθανότητας και σε συζήτηση στην τάξη έδωσαν αρκετά και κυρίως εύστοχα παραδείγματα σχετικά με αυτήν. Η όλη διαδικασία κρίθηκε από τους μαθητές ιδιαίτερα επιτυχημένη, και θα ήθελαν να συνεχίσουν να εργάζονται με προβλήματα, που σχετίζονται κυρίως με τον πραγματικό κόσμο

Γ΄ ΜΕΡΟΣ:

Το πρόβλημα μπορεί να δοθεί στους μαθητές σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή, είτε ως εργασία στο σπίτι, είτε ενδεχομένως για αξιολόγηση.

Το πρόβλημα

Σε ένα λούνα πάρκ υπάρχει ο τροχός της τύχης που φαίνεται στο σχήμα. Όλα τα τόξα είναι ίσα και ο τροχός είναι αμερόληπτος. Για να παίξουμε πληρώνουμε 2 €. Αν με το γύρισμα του τροχού έρθει το **“0”** χάνουμε, αν έρθει το **“1”** παίρνουμε 3 €, ενώ αν έρθει το **“2”** παίρνουμε 4 €. Να εξετάσετε αν το παιχνίδι ευνοεί τον παίκτη ή τον ιδιοκτήτη



<u>Λύση</u>

Επειδή οι κυκλικοί τομείς είναι ίσοι, ο τροχός είναι αμερόληπτος. Ως εκ τούτου, τα ενδεχόμενα να σταματήσει ο τροχός σε οποιονδήποτε από τους 6 τομείς είναι ισοπίθανα. Επομένως ισχύει: $P(0) = \frac{3}{6}$, $P(1) = \frac{2}{6}$, $P(2) = \frac{1}{6}$

Αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης θα παίξει ν φορές, τότε αναμένεται να προκύψουν

$\frac{3}{6} \cdot \nu$ φορές ο αριθμός 0

$\frac{2}{6} \cdot \nu$ φορές ο αριθμός 1

$\frac{1}{6} \cdot \nu$ φορές ο αριθμός 2

Ο παίκτης θα έχει πληρώσει για να παίξει στο παιχνίδι $2 \cdot \nu$ ευρώ, ενώ θα εισπράξει

$$\left(\frac{3}{6} \cdot \nu\right) \cdot 0 + \left(\frac{2}{6} \cdot \nu\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{6} \cdot \nu\right) \cdot 4 = \frac{5}{3} \cdot \nu \text{ ευρώ}$$

Αλλά $\frac{5}{3} \cdot \nu < 2 \cdot \nu$, επομένως το παιχνίδι ευνοεί τον ιδιοκτήτη

<u>ΕΠΙΛΟΓΟΣ</u>

Μολονότι η εφαρμογή της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας στη διδακτική πράξη δεν προσφέρεται για καθημερινή εφαρμογή στην τάξη με το ισχύον εκπαιδευτικό σύστημα και τον υπάρχοντα υλικοτεχνικό εξοπλισμό των σχολείων, παρόλα αυτά θεωρούμε πως ενδείκνυται η εφαρμογή της σε τακτά χρονικά διαστήματα, ώστε οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με την επίλυση προβλημάτων με απώτερους στόχους την καλλιέργεια κριτικής και διερευνητικής σκέψης και τη σύνθεση λογικών συμπερασμάτων

Σύμφωνα με τις θεωρίες μάθησης, τα παιδιά στο σχολείο μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στην εκπαίδευσή τους και όχι να αποτελούν παθητικούς δέκτες πληροφοριών και γνώσης. Όταν τα παιδιά ενθαρρύνονται να δημιουργήσουν και να πειραματιστούν εξασφαλίζεται η συμμετοχή τους στην κατάκτηση της γνώσης μέσω των εμπειριών που λαμβάνουν από τις δραστηριότητες αυτές. Έτσι οι μαθητές μαθαίνουν περισσότερα και η γνώση διαρκεί περισσότερο όταν δοκιμάζουν τα πράγματα από πρώτο χέρι και βρίσκουν διασκεδαστική την έρευνα, η οποία αποτελεί και τη μεγαλύτερη πηγή εμπειριών.

Μέσω της έρευνας και τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να έρθουν αντιμέτωπα με προβλήματα που θα τους κινήσουν το ενδιαφέρον, θα τους ενθαρρύνουν να λύσουν τις απορίες τους για αυτά που δεν γνωρίζουν και να προσεγγίσουν μόνα τους τις γνώσεις μέσα από τα δικά τους ενδιαφέροντα.

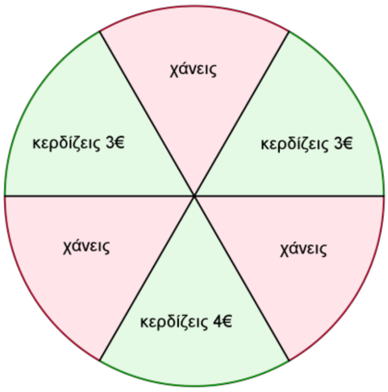
Χρησιμοποιώντας μία τέτοια προσέγγιση, όπου ο μαθητής δεν θα παραμένει απλά δέκτης όλων των πληροφοριών αλλά θα είναι ενεργός και θα συμμετέχει στην κατάκτηση της γνώσης μέσα από ερευνητικές και ενδιαφέρουσες διεργασίες, ο δάσκαλος γίνεται περισσότερο οδηγός στο πλάι των μαθητών παρά ένας «σοφός στην έδρα».

ΤΕΛΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ:

Το αρχικό φύλλο εργασίας το οποίο χρησιμοποιήθηκε (διάρκειας μίας διδακτικής ώρας) πριν την τελική επεξεργασία, ήταν το παρακάτω:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σε ένα λούνα παρκ υπάρχει ο τροχός της τύχης που έχει έξι ίσους κυκλικούς τομείς. Σε τρεις από αυτούς υπάρχει η ένδειξη «χάνεις», σε άλλους δύο υπάρχει η ένδειξη 3 € και σε έναν η ένδειξη 4 €. Η συμμετοχή σε κάθε γύρο του τροχού είναι 2 €.
Από τις έως τώρα γνώσεις και εμπειρία σας να εκτιμήσετε:



1. την πιθανότητα σε μία προσπάθεια ο παίκτης να χάσει

   ……………………………………………………………………………………………………

2. την πιθανότητα σε μία προσπάθεια ο παίκτης να κερδίσει 3 €

   ……………………………………………………………………………………………………

3. την πιθανότητα σε μία προσπάθεια ο παίκτης να κερδίσει 4 €

   ……………………………………………………………………………………………………

4. αν ο παίκτης παίξει 30 φορές, πόσες φορές αναμένεται να χάσει

   ……………………………………………………………………………………………………

5. αν ο παίκτης παίξει 30 φορές, πόσες φορές αναμένεται να κερδίσει 3 €

   ……………………………………………………………………………………………………

6. αν ο παίκτης παίξει 30 φορές, πόσες φορές αναμένεται να κερδίσει 4 €

   ……………………………………………………………………………………………………

7. το συνολικό ποσό της συμμετοχής για 30 γυρίσματα του τροχού

……

8. ποιο ποσό αναμένεται να εισπράξει συνολικά αν παίξει 30 φορές

……

9. εικάζετε ότι το παιχνίδι ευνοεί τον παίκτη ή τον ιδιοκτήτη

……

Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Πώς θα ορίζατε την έννοια της πιθανότητας;

……

……

……

……

……

- Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η πιθανότητα ενός ενδεχομένου;

……

……

……

……

Ονόματα μαθητών ομάδας:

Κεφάλαιο IV:

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου έχουν διδαχθεί επαρκώς κατά τη φοίτησή τους στο Γυμνάσιο την εξίσωση 1^{ου} βαθμού, καθώς επίσης και προβλήματα που καταλήγουν σε επίλυση πρωτοβάθμιας εξίσωσης, οπότε το ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως στη διερεύνηση των παραμετρικών εξισώσεων 1^{ου} βαθμού.
Θεωρώντας απαραίτητο ότι πρέπει να γίνει μία επανάληψη στις προϋπάρχουσες γνώσεις, προτείνεται αυτή να γίνει μέσω της διαδικασίας προτυποποίησης (μοντελοποίησης) ενός προβλήματος φυσικής.
Η προσέγγιση γίνεται με δύο διαφορετικούς τρόπους.
Ο πρώτος τρόπος είναι γνώριμος στους μαθητές από τα χρόνια του Γυμνασίου.
Ο δεύτερος τρόπος χρησιμοποιεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha x + \beta$ και τις δυνατότητες μοντελοποίησης που παρέχει το λογισμικό Modellus

Α΄ ΜΕΡΟΣ: Η πρώτη προσέγγιση

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν

- Τις εξισώσεις της ομαλής κίνησης
- Να επιλύουν εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Το Πρόβλημα και η Μαθηματική Μοντελοποίηση

«Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και κινείται προς την πόλη Β με μέση ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Α για να τον συναντήσει. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν και σε ποιο σημείο;»

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Η κίνηση του ποδηλάτη από την αφετηρία Α προς το σημείο συνάντησης Γ:

Το διάστημα που διανύει ο ποδηλάτης είναι: ……………………………………..
……………………………………………………………………………………….

2. Η κίνηση της φίλης του ποδηλάτη από το σημείο Β προς το σημείο συνάντησης Γ:

Το διάστημα που διανύει η φίλη του ποδηλάτη είναι: ……………………………….
………………………………………………………………………………………

3. Η σχέση μεταξύ των δύο διαστημάτων είναι: …………………………………..
…………………………….……………………………………………………......

4. Η σχέση μεταξύ των δύο χρόνων είναι: ……………………………………………
………………………………………………………………………………………

5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Χρόνος $t_{A\Gamma}(h)$	Χρόνος $t_{B\Gamma}(h)$	$S_{A\Gamma}(km)$	$S_{B\Gamma}(km)$	$S_{A\Gamma}+S_{B\Gamma}$
0				
½				
1				
3/2				
2				

6. Η εξίσωση που μοντελοποιεί το πρόβλημα είναι:

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

7. Το σημείο Γ στο οποίο θα συναντηθούν, είναι το σημείο που ο πρώτος ποδηλάτης θα έχει διανύσει απόσταση ……………………………………………………….
και η φίλη του απόσταση ………………………………………………………

Αναμενόμενες απαντήσεις:

1. $S_{ΑΓ} = 16 \cdot t_{ΑΓ}$

2. $S_{ΒΓ} = 12 \cdot t_{ΒΓ}$

3. $S_{ΑΓ} + S_{ΒΓ} = 44$

4. $t_{ΒΓ} = t_{ΑΓ} - 1$

5.

Χρόνος $t_{ΑΓ}(h)$	Χρόνος $t_{ΒΓ}(h)$	$S_{ΑΓ}(km)$	$S_{ΒΓ}(km)$	$S_{ΑΓ} + S_{ΒΓ}$
0	0	0	0	0
½	0	8	0	8
1	0	16	0	16
3/2	½	24	6	30
2	1	32	12	44

6. $S_{ΑΓ} + S_{ΒΓ} = 44 \Leftrightarrow 16 \cdot t + 12(t-1) = 44 \Leftrightarrow \cdots\cdots \Leftrightarrow t = 2$

7. $S_{ΑΓ} = 16 \cdot 2 = 32\ km$ και $S_{ΒΓ} = 44 - 32 = 12\ km$

<u>Β΄ ΜΕΡΟΣ:</u> Η δεύτερη προσέγγιση

<u>Τίτλος</u>: Η συνάντηση δύο αντίθετα κινούμενων ποδηλατών

Γνωστική Περιοχή: Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Η συνάρτηση $\psi = \alpha x + \beta$

Η γραφική παράσταση της ευθείας

Εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού

Εξισώσεις κίνησης

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά στη μελέτη της μεταβολής της απόστασης δύο κινητών τα οποία κινούνται επάνω στην ίδια ευθεία σε διαφορετικές κατευθύνσεις με σταθερή ταχύτητα. Συγκεκριμένα ζητείται ο χρόνος που απαιτείται για να συναντηθούν καθώς και το σημείο συνάντησης.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Modellus

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα μελετήσουν μία προσομοίωση της κίνησης των δύο ποδηλατών. Θα ανακαλύψουν το σημείο και το χρόνο συνάντησης μέσα από τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων κίνησης και του πίνακα των τιμών.

Χρόνος υλοποίησης: Εκτιμάται ότι απαιτούνται δύο διδακτικές ώρες

Χώρος υλοποίησης: Το εργαστήριο των υπολογιστών του σχολείου, στο οποίο μπορούν οι μαθητές να εργαστούν ανά τρείς σε κάθε υπολογιστή. Υπάρχει ταυτόχρονα η δυνατότητα χρήσης του διαδραστικού πίνακα.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Τις εξισώσεις της ομαλής κίνησης ως προς ένα σύστημα αναφοράς
- Το περιβάλλον του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και τον τρόπο που δημιουργείται η γραφική παράσταση της ευθείας
- Να επιλύουν εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού
- Την έννοια (αλγεβρική και γεωμετρική) της απόλυτης τιμής

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Τον τρόπο με τον οποίο εισάγονται τα μαθηματικά μοντέλα (τύποι) στο λογισμικό Modellus
- Τον τρόπο με τον οποίο υλοποιούνται τα μοντέλα και ελέγχονται τα φαινόμενα κίνησης
- Τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται οι γραφικές παραστάσεις των φαινομένων

Στόχοι:

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο τη μέσω πειραματισμού προσέγγιση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Οι μαθητές

- Να εμπλακούν σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος (problem solving)
- Να δημιουργήσουν τις συναρτήσεις που δίνουν τη θέση των κινητών κάθε χρονική στιγμή και να σχεδιάσουν τις γραφικές τους παραστάσεις
- Να συνδέσουν την έννοια της απόστασης με την απόλυτη τιμή και να παρατηρήσουν μέσω της γραφικής παράστασης την ελαχιστοποίησή της

Το Πρόβλημα και η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Ο και κινείται με κατεύθυνση την πόλη Β κάνοντας Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Ο για να τον συναντήσει, κάνοντας επίσης Ε.Ο.Κ. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν και σε ποιο σημείο;

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Δραστηριότητες:

1. Αν τη χρονική στιγμή t η θέση του ποδηλάτη είναι x, να γράψετε την εξίσωση κίνησης της θέσης του $x = x(t)$

………

2. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης της θέσης της φίλης του ποδηλάτη $x' = x'(t')$, κατά τη μετάβασή της από την πόλη Β στην πόλη Ο, θεωρώντας ως αφετηρία μέτρησης του x' την αρχική της θέση Β

………………………………………………………………………………………

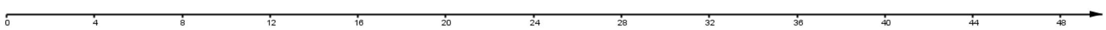
3. Αν ο ποδηλάτης συναντηθεί με τη φίλη του σε μία ενδιάμεση θέση Γ, έχοντας διανύσει απόσταση μήκους s, ποια είναι η απόσταση s΄ που θα έχει διανύσει η φίλη του σε σχέση με τον ποδηλάτη;

………………………………………………………………………………………

4. Αν t είναι ο χρόνος που κινήθηκε ο ποδηλάτης και t' ο χρόνος που κινήθηκε η φίλη του μέχρι να συναντηθούν, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους δύο χρόνους

………………………………………………………………………………………

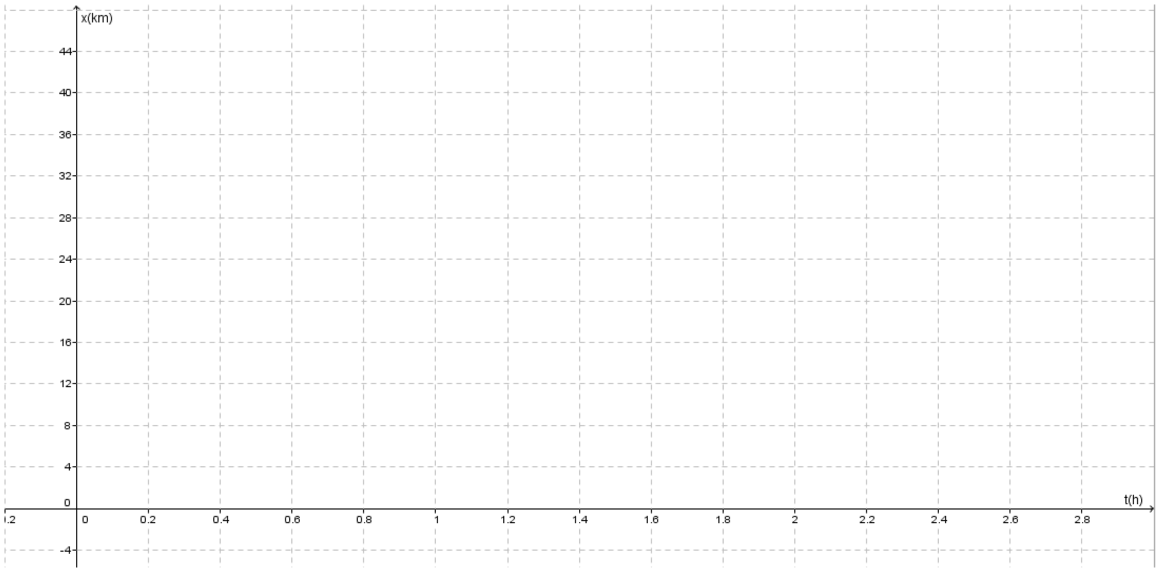
5. Η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση, επάνω στον άξονα x΄x. Αν θεωρήσουμε το σημείο Ο στη θέση Ο(0), να τοποθετήσετε το σημείο Β σε κατάλληλη θέση



Στη συνέχεια, αν θεωρήσουμε ως αρχή μέτρησης των x και x' την αρχική θέση του ποδηλάτη (το Ο), να γράψετε την εξίσωση θέσης της κίνησης της φίλης του ποδηλάτη $x' = x'(t)$

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

6. Θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων tOx, όπου t (h) και x(km).
Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης των θέσεων $x(t)$ και $x'(t)$ των δύο ποδηλατών οι οποίες μοντελοποιούν το πρόβλημα.
Να γράψετε επίσης μία σχέση που θα υπολογίζει την απόσταση των δύο ποδηλατών.
Στη συνέχεια να τρέξετε το μοντέλο και να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν, όπως επίσης και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών



…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

7. Ποια χρονική στιγμή και σε ποια θέση βλέπετε από τη γραφική παράσταση ότι θα συναντηθούν οι δύο ποδηλάτες;
Επιπλέον, τι παρατηρείτε όσον αφορά στην απόσταση τους;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

8. Να λυθεί και αλγεβρικά το πρόβλημα, συγκρίνοντας τις λύσεις σας με αυτές που παρατηρήσατε μέσω του λογισμικού

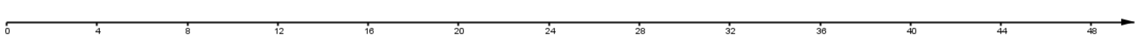
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ερμηνεία:

1η φάση:

Η πρώτη μοντελοποίηση

Οι μαθητές θα συνειδητοποιήσουν ότι οι δύο ποδηλάτες θα κινηθούν πάνω σε μία ευθεία (κίνηση σε μία διάσταση), κάνοντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

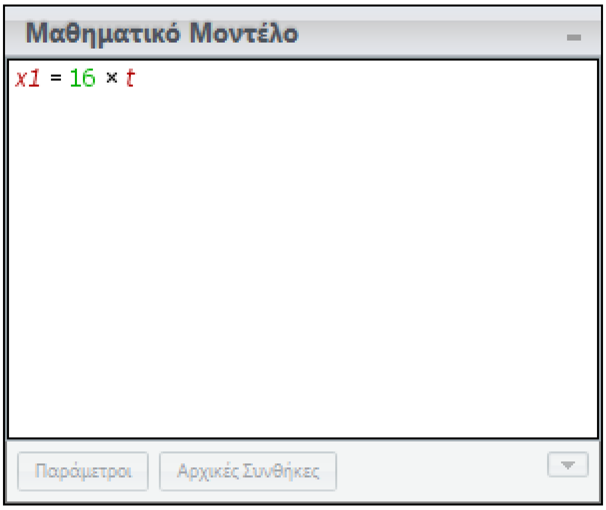


Με τις δύο πρώτες δραστηριότητες, αναμένεται οι μαθητές να δημιουργήσουν τις εξισώσεις κίνησης, με τις οποίες βρίσκουν τη θέση των δύο ποδηλατών, σε συνάρτηση με τον χρόνο κίνησής τους και θεωρώντας τους εαυτούς τους ως σημεία αναφοράς.

Δηλαδή

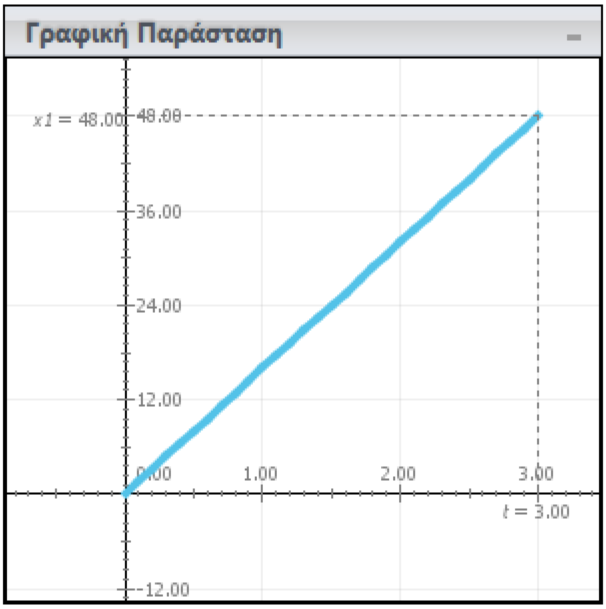
$$x = x(t) = 16 \cdot t \quad \text{και} \quad x' = x'(t') = 12 \cdot t'$$

Με τη βοήθεια του λογισμικού μπορούν να δουν τις γραφικές τους παραστάσεις και τους αντίστοιχους πίνακες τιμών.
Για παράδειγμα, έτσι φαίνεται η κίνηση του πρώτου ποδηλάτη:



Πίνακας

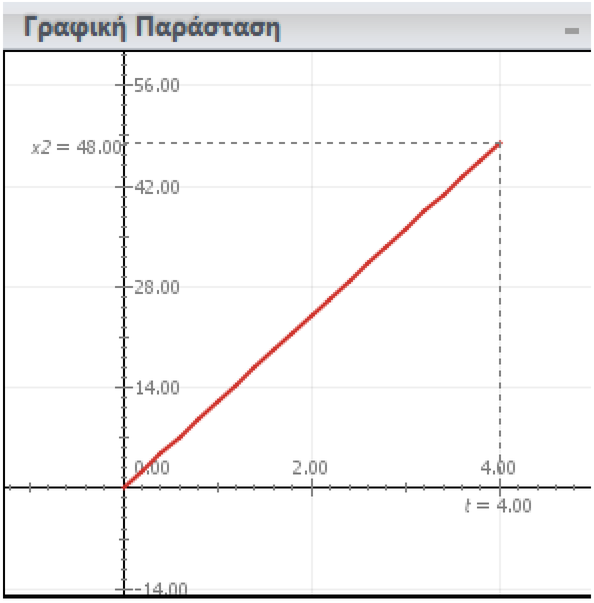
t	x1
0.00	0.00
0.20	3.20
0.40	6.40
0.60	9.60
0.80	12.80
1.00	16.00
1.20	19.20
1.40	22.40
1.60	25.60
1.80	28.80
2.00	32.00
2.20	35.20
2.40	38.40
2.60	41.60
2.80	44.80
3.00	48.00



Και έτσι η κίνηση της φίλης του:

Μαθηματικό Μοντέλο

$x2 = 12 \times t$



Πίνακας

t	x2
1.40	16.80
1.60	19.20
1.80	21.60
2.00	24.00
2.20	26.40
2.40	28.80
2.60	31.20
2.80	33.60
3.00	36.00
3.20	38.40
3.40	40.80
3.60	43.20
3.80	45.60
4.00	48.00

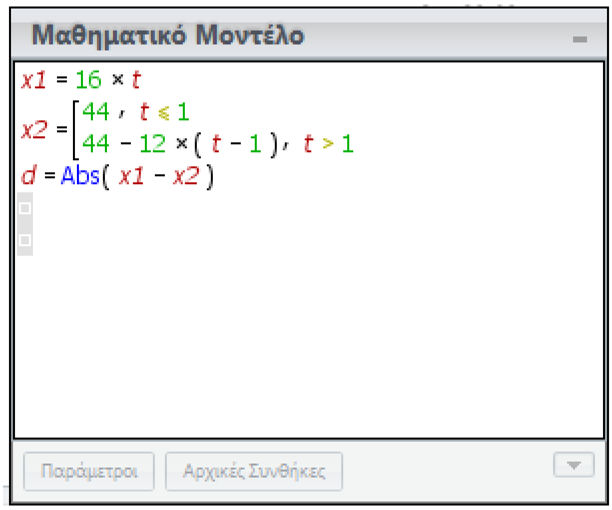
2η φάση:

Η δεύτερη μοντελοποίηση

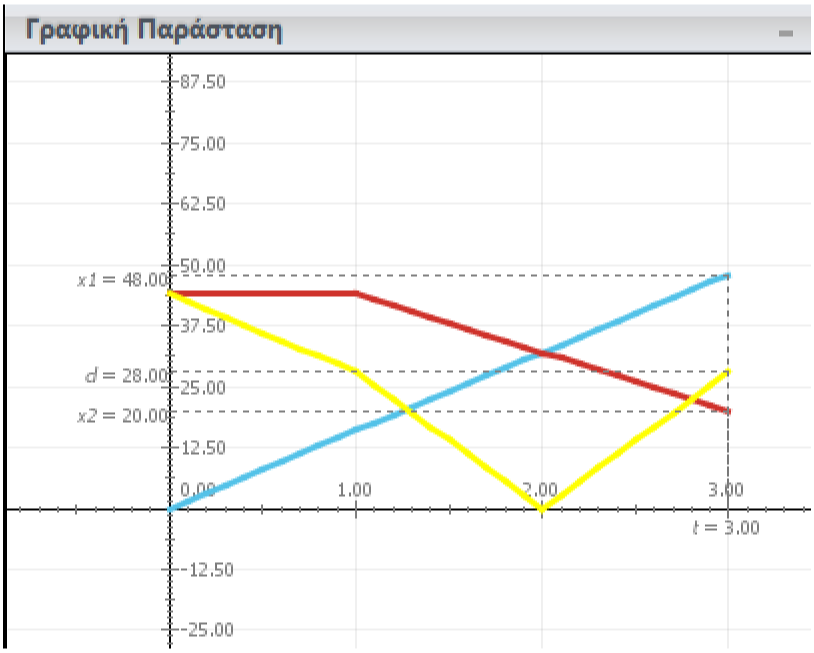
Με τη βοήθεια της 3ης και 4ης δραστηριότητας του φύλλου εργασίας οι μαθητές καλούνται να διαπραγματευθούν τη σχέση μεταξύ των δύο κινήσεων, όσον αφορά στο διανυθέν διάστημα από τους δύο ποδηλάτες και το χρόνο που έκανε καθένας τους. Αναμένεται να απαντήσουν ότι το διάστημα που διήνυσε η φίλη του ποδηλάτη σε σχέση με αυτόν είναι $s' = 44 - s$ και ο χρόνος της είναι $t' = t - 1$

Με τις επόμενες δραστηριότητες οδηγούνται οι μαθητές να σκεφθούν πως θα δημιουργήσουν τις εξισώσεις κίνησης των θέσεων των δύο ποδηλατών συναρτήσει του χρόνου t κίνησης του πρώτου, δηλαδή έχοντας **κοινό σημείο αναφοράς** τον πρώτο ποδηλάτη, δημιουργώντας έτσι την τελική μοντελοποίηση του προβλήματος.

Αναμένεται να καταλήξουν στις εξισώσεις που φαίνονται στο παρακάτω παράθυρο του μαθηματικού μοντέλου. Για καλύτερη κατανόηση της έννοιας της απόστασης, ζητείται μία σχέση η οποία θα εκφράζει την απόσταση των διαδοχικών θέσεων των δύο ποδηλατών, η οποία φαίνεται και αυτή στο ίδιο παράθυρο:



Ζητώντας από τους μαθητές να τρέξουν το μοντέλο, αναμένουμε να δουν την πορεία κίνησης των δύο ποδηλατών, αφενός μέσα από τη γραφική παράσταση του μοντέλου, αφετέρου δε από τον πίνακα τιμών:



Πίνακας

t	x1	x2	d
0.90	14.40	44.00	29.60
1.00	16.00	44.00	28.00
1.10	17.60	42.80	25.20
1.20	19.20	41.60	22.40
1.30	20.80	40.40	19.60
1.40	22.40	39.20	16.80
1.50	24.00	38.00	14.00
1.60	25.60	36.80	11.20
1.70	27.20	35.60	8.40
1.80	28.80	34.40	5.60
1.90	30.40	33.20	2.80
2.00	32.00	32.00	0.00
2.10	33.60	30.80	2.80
2.20	35.20	29.60	5.60
2.30	36.80	28.40	8.40
2.40	38.40	27.20	11.20
2.50	40.00	26.00	14.00
2.60	41.60	24.80	16.80
2.70	43.20	23.60	19.60
2.80	44.80	22.40	22.40
2.90	46.40	21.20	25.20
3.00	48.00	20.00	28.00

Στη συνέχεια ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να ερμηνεύσουν τις γραφικές παραστάσεις που σχεδιάστηκαν από το λογισμικό, εστιάζοντας στην εύρεση της χρονικής στιγμής της συνάντησης και στη θέση που έγινε αυτή. Αναμένει να παρατηρήσουν από το γράφημα, ότι η συνάντηση έγινε τη χρονική στιγμή $t = 2$, κατά την οποία τέμνονται οι δύο ευθείες (εξισώσεις κίνησης – θέσης) του σχήματος. Αναμένει επίσης να παρατηρήσουν, από τη γραμμή που εκφράζει την απόσταση των δύο ποδηλατών, ότι τότε η απόστασή τους γίνεται μηδέν. Επιπλέον, ζητώντας από τους μαθητές να μελετήσουν τα στοιχεία του πίνακα τιμών, περιμένει να επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την προηγούμενη παρατήρηση, βρίσκοντας επίσης την ακριβή θέση συνάντησης, παρατηρώντας την κατάλληλη γραμμή του πίνακα (η χρωματισμένη στην παραπάνω εικόνα)

3η φάση:

Στη συνέχεια ο διδάσκων ζητάει από τους μαθητές την αυστηρή αλγεβρική απόδειξη των προηγούμενων. Αναμένει λοιπόν να δημιουργήσουν την εξίσωση που μοντελοποιεί και λύνει το πρόβλημα, εφόσον έχουν κατανοήσει ότι συνάντηση σημαίνει ότι οι δύο ποδηλάτες βρίσκονται στην ίδια θέση, δηλαδή:

$$x(t) = x'(t) \Leftrightarrow 16 \cdot t = 44 - 12(t-1) \Leftrightarrow \cdots\cdots \Leftrightarrow t = 2$$

Επίσης, για το σημείο συνάντησης: $x = x(2) = 16 \cdot 2 = 32$

Σύνοψη των δραστηριοτήτων και αξιολόγηση

Ως προς τη διαδικασία υλοποίησης:

Η διαδικασία της υλοποίησης του σεναρίου κρίνεται ικανοποιητική, στο βαθμό που αναδείχθηκαν οι βασικές πτυχές τις διαδικασίας της μοντελοποίησης του προβλήματος. Οι ερωτήσεις, όπως διατυπώνονται στο φύλλο εργασίας, οδήγησαν με επιτυχία τους μαθητές στην υλοποίηση του σεναρίου, μολονότι οι μαθητές έχουν τις αναμενόμενες δυσκολίες σύνδεσης μαθηματικών και φυσικών εννοιών.

Το βασικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται κατά την υλοποίηση είναι η πίεση του χρόνου, που οφείλεται βασικά στην έλλειψη εμπειρίας των μαθητών αναφορικά με τη λειτουργία του λογισμικού.

Επιπλέον δόθηκε περισσότερη προσοχή στον τρόπο με τον οποίο οδηγούνται οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν τι συμβαίνει όταν αλλάζει το σημείο αναφοράς της κίνησης, τόσο από μαθηματικής όσο και από φυσικής πλευράς.

Ως προς τα εργαλεία:

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες της δραστηριότητας παρουσιάζει τα αναμενόμενα προβλήματα από τις αντικειμενικές δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στο να χειριστούν με επάρκεια το λογισμικό. Κρίνεται απαραίτητο να έχουν εργαστεί προηγούμενα με απλές εφαρμογές επάνω στο λογισμικό.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (Ι)

Το Πρόβλημα και η Μαθηματική Μοντελοποίηση

«Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και κινείται προς την πόλη Β με μέση ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Α για να τον συναντήσει.
Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν και σε ποιο σημείο;»

Πορεία δραστηριοτήτων:

1. Η κίνηση του ποδηλάτη από την αφετηρία Α προς το σημείο συνάντησης Γ.

Το διάστημα που διανύει ο ποδηλάτης είναι:
…………………………………………………………………………………………

2. Η κίνηση της φίλης του ποδηλάτη από το σημείο Β προς το σημείο συνάντησης Γ. Το διάστημα που διανύει η φίλη του ποδηλάτη είναι:
………………………………………………………………………………………….

3. Η σχέση μεταξύ των δύο διαστημάτων είναι:
……………………………………………………...... ………………………………….

4. Η σχέση μεταξύ των δύο χρόνων είναι:
………………………………………………………………………………………….

5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Χρόνος $t_{ΑΓ}(h)$	Χρόνος $t_{ΒΓ}(h)$	$S_{ΑΓ}(km)$	$S_{ΒΓ}(km)$	$S_{ΑΓ} + S_{ΒΓ}$
0				
½				
1				
3/2				
2				

6. Η εξίσωση που μοντελοποιεί το πρόβλημα είναι:

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

7. Το σημείο Γ στο οποίο θα συναντηθούν, είναι το σημείο που ο πρώτος ποδηλάτης θα έχει διανύσει απόσταση ……………, και η φίλη του απόσταση ………………….

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (ΙΙ)

Το Πρόβλημα και η Μαθηματική Μοντελοποίηση

«Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Ο και κινείται προς την πόλη Β κάνοντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Ο για να τον συναντήσει, κάνοντας επίσης Ε.Ο.Κ.
Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν και σε ποιο σημείο;»

<u>Δραστηριότητες:</u>

1. Αν τη χρονική στιγμή t η θέση του ποδηλάτη είναι x, να γράψετε την εξίσωση κίνησης της θέσης του $x = x(t)$

………………………………………………………………………………………

2. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης της θέσης της φίλης του ποδηλάτη $x' = x'(t')$, κατά τη μετάβασή της από την πόλη Β στην πόλη Ο, θεωρώντας ως αφετηρία μέτρησης του x' την αρχική της θέση Β

………………………………………………………………………………………

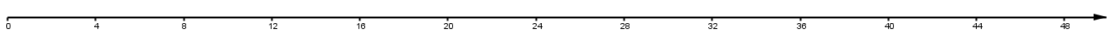
3. Αν ο ποδηλάτης συναντηθεί με τη φίλη του σε μία ενδιάμεση θέση Γ, έχοντας διανύσει απόσταση μήκους s, ποια είναι η απόσταση s΄ που θα έχει διανύσει η φίλη του σε σχέση με τον ποδηλάτη;

………………………………………………………………………………………

4. Αν t είναι ο χρόνος που κινήθηκε ο ποδηλάτης και t' ο χρόνος που κινήθηκε η φίλη του μέχρι να συναντηθούν, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους δύο χρόνους

………………………………………………………………………………………

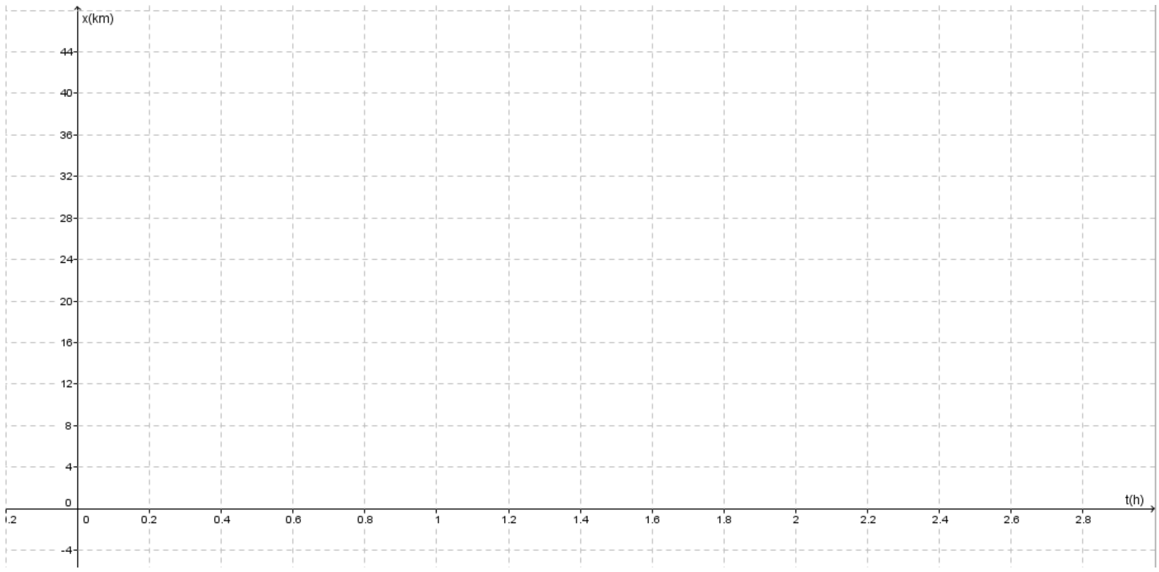
5. Η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση, επάνω στον άξονα x΄x. Αν θεωρήσουμε το σημείο Ο στη θέση Ο(0), να τοποθετήσετε το σημείο Β σε κατάλληλη θέση



Στη συνέχεια, αν θεωρήσουμε ως αρχή μέτρησης των x και x' την αρχική θέση του ποδηλάτη (το Ο), να γράψετε την εξίσωση θέσης της κίνησης της φίλης του ποδηλάτη $x' = x'(t)$

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

6. Θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων tOx, όπου t (h) και x (km). Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης των θέσεων $x(t)$ και $x'(t)$ των δύο ποδηλατών που μοντελοποιούν το πρόβλημα, καθώς επίσης και μία σχέση που θα υπολογίζει την απόσταση των δύο ποδηλατών.
Στη συνέχεια να τρέξετε το μοντέλο και να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν, όπως επίσης και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών



…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

7. Ποια χρονική στιγμή και σε ποια θέση βλέπετε από τη γραφική παράσταση ότι θα συναντηθούν οι δύο ποδηλάτες;
Επιπλέον, τι παρατηρείτε όσον αφορά στην απόσταση τους;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

8. Να λυθεί και αλγεβρικά το πρόβλημα, συγκρίνοντας τις λύσεις σας με αυτές που παρατηρήσατε μέσω του λογισμικού

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Κεφάλαιο V:

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ

1η Δραστηριότητα

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου Βαθμού

Μία εισαγωγή για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με ένα ιστορικό παράδειγμα

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι τύποι των εμβαδών τετραγώνου και ορθογωνίου

Στόχοι: Οι μαθητές

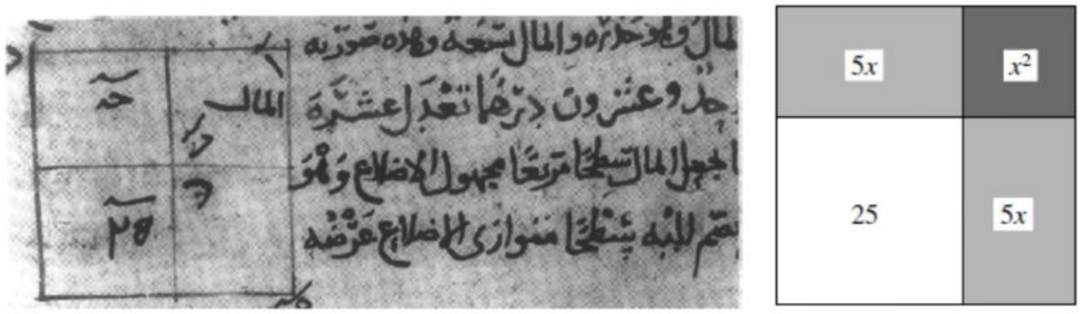
- να ανακαλύψουν τη γεωμετρική σημασία της τετραγωνικής εξίσωσης και να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις με τις γυμνασιακές τους γνώσεις
- να δουν ένα ψήγμα από τις διαχρονικές προσπάθειες του ανθρώπου να ανακαλύψουν μία μέθοδο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, ενταγμένη μέσα στο χρονικό και πολιτισμικό πλαίσιο της εποχής
- εμπλακούν σε συζήτηση με θέματα:
  α) την ονομασία της τετραγωνικής εξίσωσης
  β) τη γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης
  γ) την έννοια της εξίσωσης
  δ) τις διαφορές με τη σύγχρονη αλγεβρική της εκδοχή
  ε) τις ιστορικές αναφορές

Ένα παράδειγμα από τον Al – Khowârizmi:

Να επιλυθεί η εξίσωση: $x^2 + 10x = 39$ (1)

Μια τέτοια εξίσωση κρύβει την άγνωστη λύση του x, την οποία οι Άραβες αποκαλούσαν *dshidr* (ρίζα), μία λέξη η οποία αρχικά αναφερόταν ως η πλευρά ενός τετραγώνου δοθείσης επιφάνειας.
(«Μια ρίζα είναι κάθε ποσότητα η οποία υπάρχει για να πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό της» F. Rosen, 1831)

Παρακάτω φαίνεται ο τρόπος που αντιμετώπιζε ο συγγραφέας και οι σύγχρονοί του την επίλυση της τετραγωνικής εξίσωσης.



Manuscript of 1342 Modern Drawing

FIGURE 1.1. Solution of $x^2 + 10x = 39$

Στο παραπάνω εικόνα φαίνεται αριστερά το πρωτότυπο χειρόγραφο του 1342 και δεξιά μια σύγχρονη απόδοσή του.

Ο Al – Khowârizmi σχεδιάζει ένα τετράγωνο με πλευρά x για να αντιπροσωπεύσει το x^2 και δύο ορθογώνια με πλευρές 5 και x για τον όρο $10x$. Η εξίσωση (1), αν κοιτάξουμε το σχήμα, δείχνει ότι η σκιασμένη περιοχή ισούται με 39. Ως εκ τούτου, η περιοχή ολόκληρου του τετραγώνου είναι: $39 + 25 = 64 = 8 \cdot 8$

Επομένως προκύπτει ότι $5 + x = 8$, άρα $x = 3$

Έτσι η ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός 3.

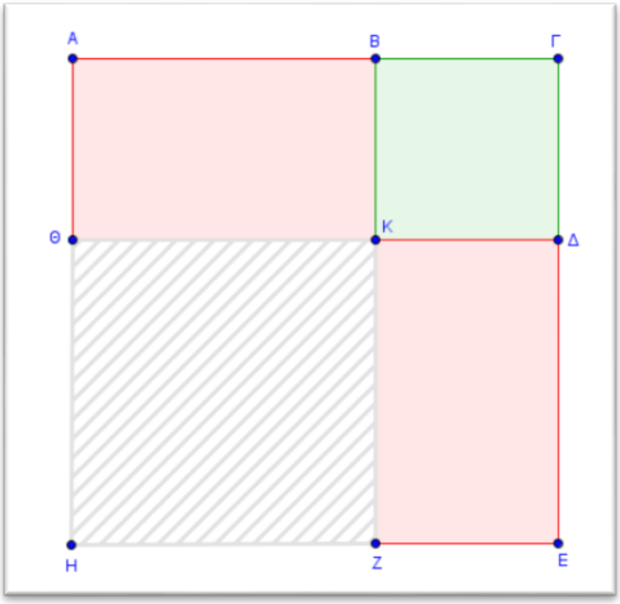
<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η λύση της εξίσωσης $x^2 + 10x = 39$ σε ένα χειρόγραφο του 1342.

Manuscript of 1342

Solution of $x^2 + 10x = 39$

Δίνεται το παρακάτω τετράγωνο, με $AB = \Delta E = 5$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta = x$.



1η Δραστηριότητα:

Να αναγνωρίσετε τα τέσσερα γεωμετρικά σχήματα που σχηματίζονται στο εσωτερικό του τετραγώνου ΑΓΕΗ.

2η Δραστηριότητα:

Να εκφράσετε τα εμβαδά των ΑΒΚΘ, ΒΓΔΚ, ΚΔΕΖ και ΑΓΕΗ ως συνάρτηση του x.
Σημειώστε επάνω στα τέσσερα εσωτερικά σχήματα το εμβαδόν τους.

3η Δραστηριότητα:

Τι εκφράζει στο σχήμα σας η ισότητα $x^2 + 10x = 39$;

Μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς x;

2η Δραστηριότητα

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου Βαθμού

Πρόβλημα Αναγωγής στη Μονάδα

Στόχοι: Οι μαθητές

- να κατασκευάσουν την εξίσωση που μοντελοποιεί το πρόβλημα
- να επιλύσουν την εξίσωση 2ου βαθμού
- να ελέγξουν αν τα αλγεβρικά αποτελέσματα είναι «συμβατά» με τα δεδομένα του προβλήματος

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ένας επίγειος μετεωρολογικός σταθμός τροφοδοτείται καθημερινά με δεδομένα μέσω δορυφόρου. Για την επεξεργασία των δεδομένων διαθέτει δύο μονάδες υπολογιστών Α και Β σταθερής απόδοσης.
Αν χρησιμοποιηθεί μόνο μία από τις δύο μονάδες, τότε η μονάδα Β χρειάζεται 6 ώρες περισσότερο από ότι η μονάδα Α για να ολοκληρώσει την επεξεργασία του ημερήσιου όγκου δεδομένων.
Αν οι δύο μονάδες συνδεθούν μέσω ειδικού λογισμικού (ταυτόχρονη λειτουργία), τότε η επεξεργασία των δεδομένων ολοκληρώνεται σε 4 ώρες.
Να βρείτε το χρόνο σε ώρες που απαιτείται από κάθε μονάδα χωριστά για την επεξεργασία του ημερήσιου όγκου δεδομένων που λαμβάνονται από το δορυφόρο.

Έστω Δ ο ημερήσιος όγκος δεδομένων και t σε ώρες ο χρόνος που χρειάζεται η μονάδα Α για την επεξεργασία τους όταν λειτουργεί μόνη της.

Τότε:
1. Ο χρόνος σε ώρες που χρειάζεται η μονάδα Β για την ίδια διαδικασία όταν λειτουργεί μόνη της είναι:

………………………………………………………………………………………

2. Θεωρούμε ότι η κάθε μονάδα λειτουργεί μόνη της.
Τί μέρος του ημερήσιου όγκου δεδομένων επεξεργάζεται σε μία (1) ώρα:
i) η μονάδα Α ……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………… …
ii) η μονάδα Β ……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………….

3. Όταν λειτουργούν και οι δύο μονάδες ταυτόχρονα, τί μέρος του ημερήσιου όγκου δεδομένων θα έχει επεξεργαστεί σε μία (1) ώρα;

…………..………..…………………………………………………………………….

4. Η εξίσωση που μοντελοποιεί το πρόβλημα είναι:

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

5. Επίλυση εξίσωσης:

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..

6. Έλεγχος των λύσεων:

……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………….

ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Αν t είναι ο χρόνος σε ώρες που χρειάζεται η μονάδα Α, τότε η Β χρειάζεται (t+6) ώρες

2. Σε μία ώρα ο όγκος των δεδομένων που επεξεργάζεται η κάθε μονάδα χωριστά είναι:

   i) μονάδα Α: $\frac{\Delta}{t}$ ii) μονάδα Β: $\frac{\Delta}{t+6}$

3. Όταν λειτουργούν και οι δύο μονάδες ταυτόχρονα, ο όγκος των δεδομένων που επεξεργάζονται σε μία ώρα είναι: $\frac{\Delta}{t}+\frac{\Delta}{t+6}$

4. Η εξίσωση που μοντελοποιεί το πρόβλημα είναι :

$$\frac{\Delta}{t}+\frac{\Delta}{t+6}=\frac{\Delta}{4} \overset{\Delta\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{t}+\frac{1}{t+6}=\frac{1}{4}$$

5. Επίλυση εξίσωσης : $4(t+6)+4t=t(t+6) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t^2-2t-24=0$

6. Έλεγχος των λύσεων: οι λύσεις είναι $t = 6$ (επιτρεπτή) ή $t = -4$ που απορρίπτεται διότι $t > 0$

3η Δραστηριότητα

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ – ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ

Τίτλος: Η κίνηση δύο τρένων και η ελάχιστη απόστασή τους

Γνωστική Περιοχή: Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Εξισώσεις – Ανισώσεις 2ου βαθμού

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Η γραφική παράσταση του τριωνύμου

Εξισώσεις κίνησης

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά στη μελέτη της μεταβολής της απόστασης δύο κινητών τα οποία κινούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις με σταθερή ταχύτητα. Συγκεκριμένα ζητείται η ελάχιστη απόσταση των κινητών, τα οποία αναφέρονται ως τρένα των οποίων οι πορείες σχηματίζουν ορθή γωνία.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Modellus

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα μελετήσουν μία προσομοίωση της κίνησης δύο τρένων. Το μαθηματικό μοντέλο της απόστασης δύο κινητών που κινούνται σε κάθετες πορείες, οδηγεί σε ένα τριώνυμο και επομένως η μελέτη του φαινομένου της απομάκρυνσης των τρένων ανάγεται στη μελέτη των ιδιοτήτων της παραβολής.

Χρόνος υλοποίησης: Εκτιμάται ότι απαιτούνται δύο διδακτικές ώρες

Χώρος υλοποίησης: Το εργαστήριο των υπολογιστών του σχολείου, στο οποίο μπορούν οι μαθητές να εργαστούν ανά τρείς σε κάθε υπολογιστή. Υπάρχει ταυτόχρονα η δυνατότητα χρήσης του διαδραστικού πίνακα.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Τις εξισώσεις της ομαλής κίνησης ως προς ένα σύστημα αναφοράς
- Το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τη συμβολή του στον τρόπο υπολογισμού της απόστασης δύο σημείων στο Καρτεσιανό επίπεδο
- Να διερευνούν και να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Τον τρόπο με τον οποίο εισάγονται τα μαθηματικά μοντέλα (τύποι) στο λογισμικό Modellus
- Τον τρόπο με τον οποίο υλοποιούνται τα μοντέλα και ελέγχονται τα φαινόμενα κίνησης
- Τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται οι γραφικές παραστάσεις των φαινομένων

Στόχοι:

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο τη μέσω πειραματισμού προσέγγιση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Οι μαθητές

- να εμπλακούν σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος (problem solving)
- να δημιουργήσουν τις συναρτήσεις που δίνουν τη θέση των κινητών κάθε χρονική στιγμή και να δημιουργήσουν τη συνάρτηση του τριωνύμου ως μοντέλο της απόστασης των δύο τρένων
- να μελετήσουν τις ιδιότητες του τριωνύμου και να τις συνδέσουν με μία πραγματική κατάσταση
- να διαπραγματευθούν με προβλήματα εύρεσης αποστάσεων και μία διαδικασία ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης τους

Το Πρόβλημα και η Μαθηματική Μοντελοποίηση

Δύο ευθύγραμμες σιδηροτροχιές τέμνονται σχηματίζοντας ορθή γωνία. Δύο τρένα κινούνται ταυτόχρονα προς το σημείο που συναντούνται οι δύο σιδηροτροχιές.
Το ένα έχει ξεκινήσει από κάποιο σταθμό που απέχει 40 χιλιόμετρα από το σημείο τομής και το άλλο από κάποιο σταθμό που απέχει 50 χιλιόμετρα από το ίδιο σημείο. Το πρώτο τρένο έχει ταχύτητα 800 μέτρα ανά λεπτό και το δεύτερο 600 μέτρα ανά

λεπτό. Σε πόσα λεπτά μετά την αναχώρησή τους θα έχουν οι αμαξοστοιχίες την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους; Υπολογίστε τη συγκεκριμένη απόσταση.
(Από το βιβλίο του Yakov Perelman «Διασκεδαστικά Μαθηματικά» Μέρος 2: Άλγεβρα, εκδόσεις Κάτοπτρο, 2001)

Επιπλέον ερωτήματα:

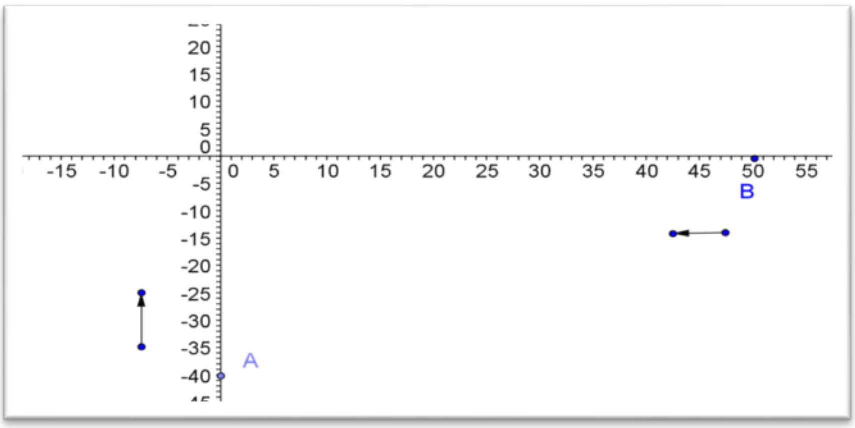
1. Να βρείτε τη θέση των δύο τρένων τη χρονική στιγμή που η απόστασή τους γίνεται ελάχιστη

2. Αν ο οδηγός του δεύτερου τρένου χάσει τον έλεγχο της ταχύτητας του τρένου και το τρένο αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα από την προαναφερθείσα, υπάρχει περίπτωση να συγκρουστούν τα δύο τρένα στο σημείο τομής των δύο σιδηροτροχιών και πότε;

Η ΠΟΡΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

1. Αν θεωρήσουμε ότι το Α τρένο κινείται προς το Βορρά και το Β προς τη Δύση, να προσδιορίσετε τη θέση των δύο τρένων σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων

Αναμενόμενη απάντηση: Α(0, – 40), Β(50,0)



2. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης της θέσης

Α) του Α τρένου
……………………………………………………………………………………

Β) του Β τρένου
……………………………………………………………………………………….

Αναμενόμενη απάντηση: Οι εξισώσεις κίνησης ως προς το xOψ σύστημα αναφοράς:

$x(t) = 50 - 0{,}6 \cdot t$

$\psi(t) = -40 + 0{,}8 \cdot t,\ t \geq 0$

3. α) Να βρεθεί η απόσταση d των δύο τρένων τη χρονική στιγμή t = 5

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Αναμενόμενη απάντηση:

Τη χρονική στιγμή t = 5, θα είναι:

ΟΚ = ψ (5) = – 36 και ΟΛ = x (5) = 47

Εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΛ προκύπτει ότι:

d(5) = ΚΛ = $10\sqrt{41}$

β) Να βρεθεί η απόσταση d = d (t) των δύο τρένων κάθε χρονική στιγμή t

…………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..

Αναμενόμενη απάντηση:

Η απόσταση των θέσεων τους συναρτήσει του χρόνου κίνησης τους είναι

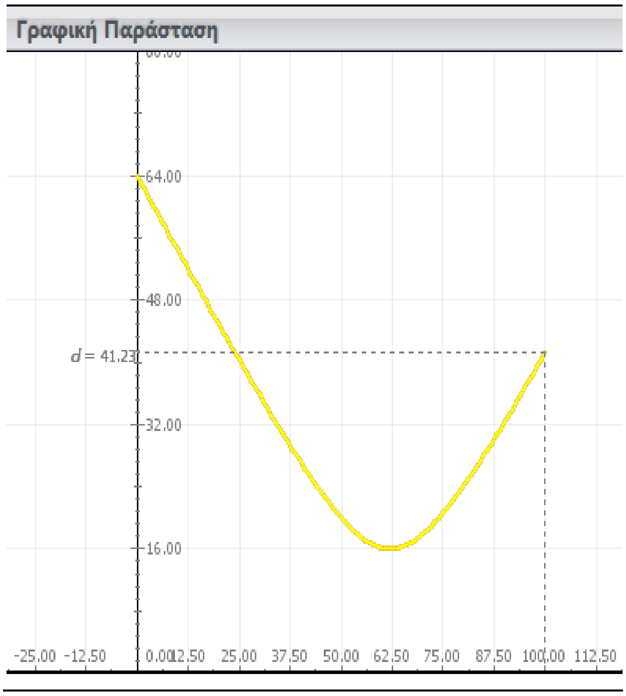
$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + \psi^2(t)} = \cdots = \sqrt{t^2 - 124 \cdot t + 4100}$$

4. Να τρέξετε το μοντέλο και να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση που προκύπτει καθώς και τον πίνακα τιμών

Τα προκύπτοντα από το Modellus είναι:

Πίνακας

t	x1	x2	d
54.00	17.60	3.20	17.89
55.00	17.00	4.00	17.46
56.00	16.40	4.80	17.09
57.00	15.80	5.60	16.76
58.00	15.20	6.40	16.49
59.00	14.60	7.20	16.28
60.00	14.00	8.00	16.12
61.00	13.40	8.80	16.03
62.00	12.80	9.60	16.00
63.00	12.20	10.40	16.03
64.00	11.60	11.20	16.12
65.00	11.00	12.00	16.28
66.00	10.40	12.80	16.49
67.00	9.80	13.60	16.76
68.00	9.20	14.40	17.09
69.00	8.60	15.20	17.46
70.00	8.00	16.00	17.89
71.00	7.40	16.80	18.36
72.00	6.80	17.60	18.87
73.00	6.20	18.40	19.42
74.00	5.60	19.20	20.00
75.00	5.00	20.00	20.62
76.00	4.40	20.80	21.26



Αναμενόμενες απαντήσεις:

Α) Από τον πίνακα τιμών: Τη χρονική στιγμή $t = 62$ τα δύο τρένα βρίσκονται στις θέσεις 12,80 και 9,60 αντίστοιχα, ενώ η ελάχιστη απόσταση είναι 16,00.

Β) Από τη γραφική παράσταση: Αναμένουμε οι μαθητές να «δουν» τη χρονική στιγμή που παρουσιάζεται η ελάχιστη απόσταση και την ελάχιστη απόσταση. Αναμενόμενος είναι επίσης, ο σχολιασμός της δυσκολίας της ακριβούς παρατήρησης των προαναφερθέντων τιμών και η ανάγκη της εύρεσής τους μέσω αυστηρών αλγεβρικών διαδικασιών.

5. α) Να γράψετε την εξίσωση που εκφράζει το χρόνο κίνησης συναρτήσει της απόστασης d των δύο τρένων

…………………………………………………………………………………………

Αναμενόμενη απάντηση:

$$d^2 = t^2 - 124 \cdot t + 4100 \Leftrightarrow t^2 - 124 \cdot t + 4100 - d^2 = 0 \quad (1)$$

β) Για ποιες τιμές του d η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Αναμενόμενη απάντηση:

Έχουμε δευτεροβάθμια εξίσωση, με παράμετρο $d \geq 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4(d^2 - 256)$ και η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες όταν

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \ldots \overset{d>0}{\Leftrightarrow} d \geq 16$

6. Ποια χρονική στιγμή η απόσταση γίνεται d ελάχιστη;

……………………………………………………………………………………………..

Αναμενόμενη απάντηση:

$d = 16$, οπότε $\Delta = 0 \Leftrightarrow t = 62$

<u>**Ερώτημα 1ο:**</u> Τη χρονική στιγμή $t = 62$ τα δύο τρένα βρίσκονται στις θέσεις

$x(62) = 50 - 0{,}6 \cdot 62 = 12{,}8$ και $\psi(62) = -40 + 0{,}8 \cdot 62 = 9{,}6$ αντίστοιχα

και απέχουν την ελάχιστη απόσταση $d = 16$

<u>**Ερώτημα 2ο**</u>

Το πρώτο τρένο, με ταχύτητα 800 m/min = 0,8 km/min, φθάνει στο σημείο O(0,0) σε χρόνο:

$$0 = -40 + 0{,}8 \cdot t \Leftrightarrow t = 50 \ min$$

Το δεύτερο τρένο, στον προαναφερθέντα χρόνο φθάνει στο σημείο O(0,0) κινούμενο με ταχύτητα v km/min:

$$0 = 50 - v \cdot 50 \Leftrightarrow v = 1 \ km/min \Leftrightarrow v = 1000 \ m/min$$

<u>Διαφορετικά</u>: Το δεύτερο τρένο έχει να διανύσει 50 km σε 50 min κάνοντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Επομένως η σταθερή του ταχύτητα είναι $v = \frac{50}{50} = 1 \ km/min$

Σχόλιο: Στις εξισώσεις κίνησης η μονάδα μήκους εκφράζεται σε χιλιόμετρα

Συμπέρασμα: Αν το δεύτερο τρένο κινηθεί με ταχύτητα $1000\ m/min$, και το πρώτο κινείται με την αρχική του ταχύτητα, τα δύο τρένα θα συγκρουστούν στη θέση O(0,0)

2η Προσέγγιση: (Γραφική Παράσταση Τριωνύμου)

Η συνάρτηση $d(t) = \sqrt{t^2 - 124 \cdot t + 4100}$ γίνεται **ελάχιστη**, όταν η παράσταση κάτω από την ρίζα γίνεται ελάχιστη. Έτσι θα βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

$$f(t) = t^2 - 124 \cdot t + 4100, \ \ t \geq 0$$

Η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

και επειδή το α = 1 > 0 παρουσιάζει ελάχιστο.

Έτσι τη χρονική στιγμή $t = -\frac{-124}{2} = 62$ η f έχει ελάχιστη τιμή την

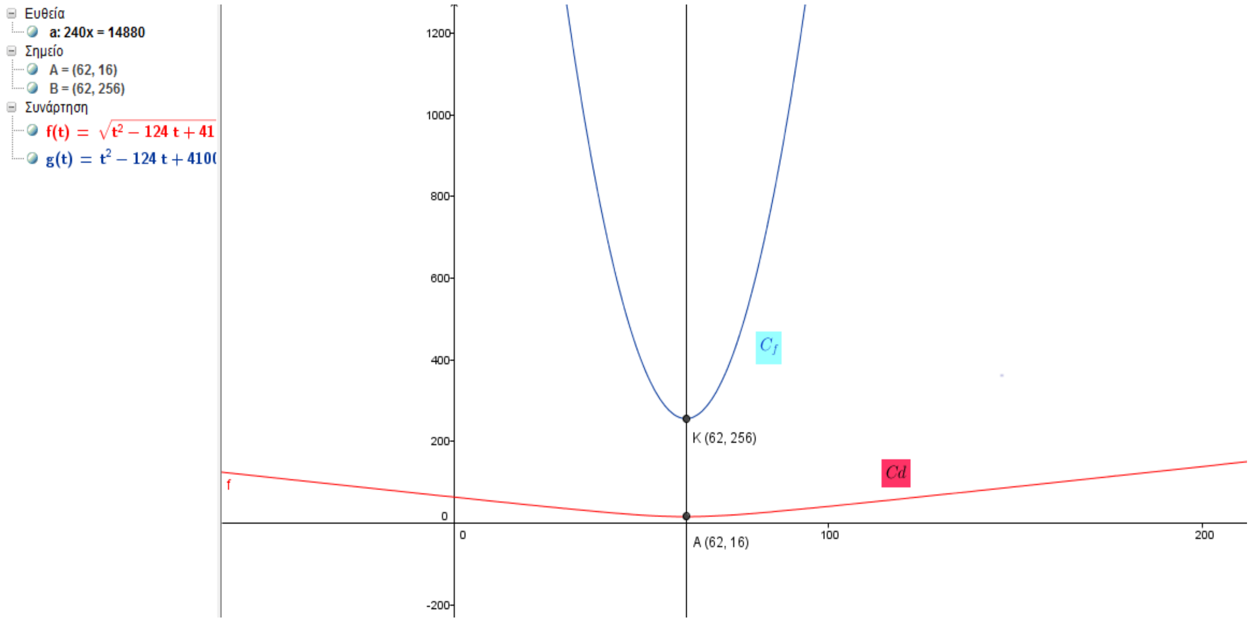
$$f_{min} = -\frac{-1024}{4} = 256$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή της απόστασης είναι:

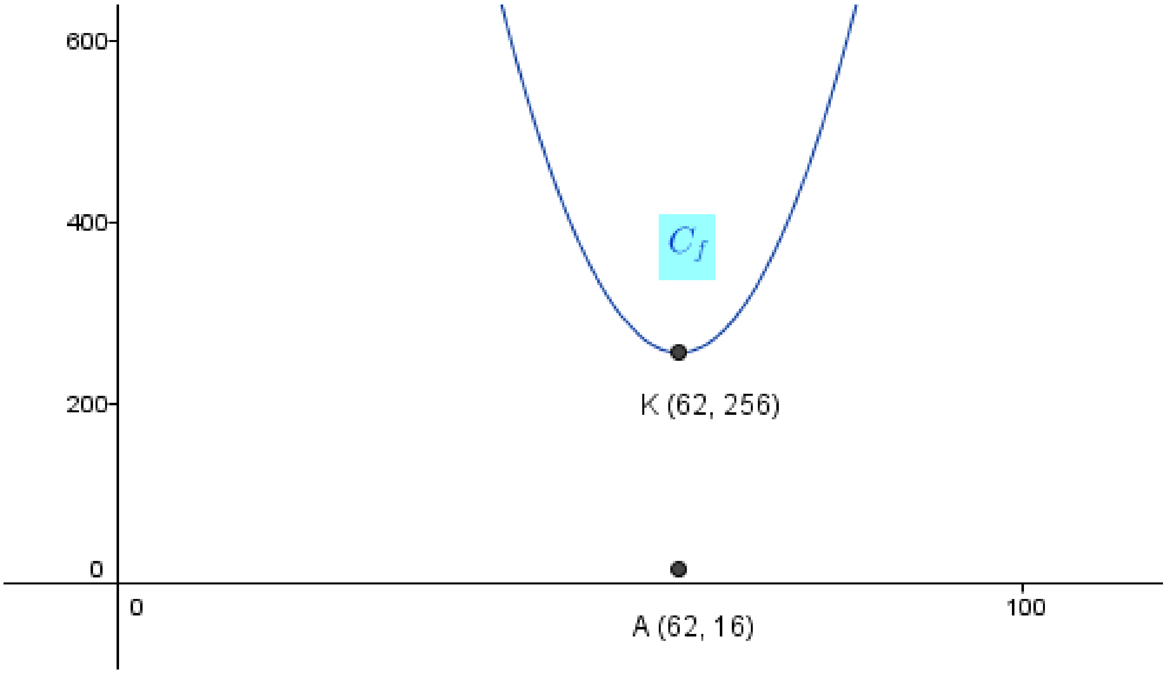
$$d_{min} = d(62) = \sqrt{256} = 16$$

Γραφικές Παραστάσεις:

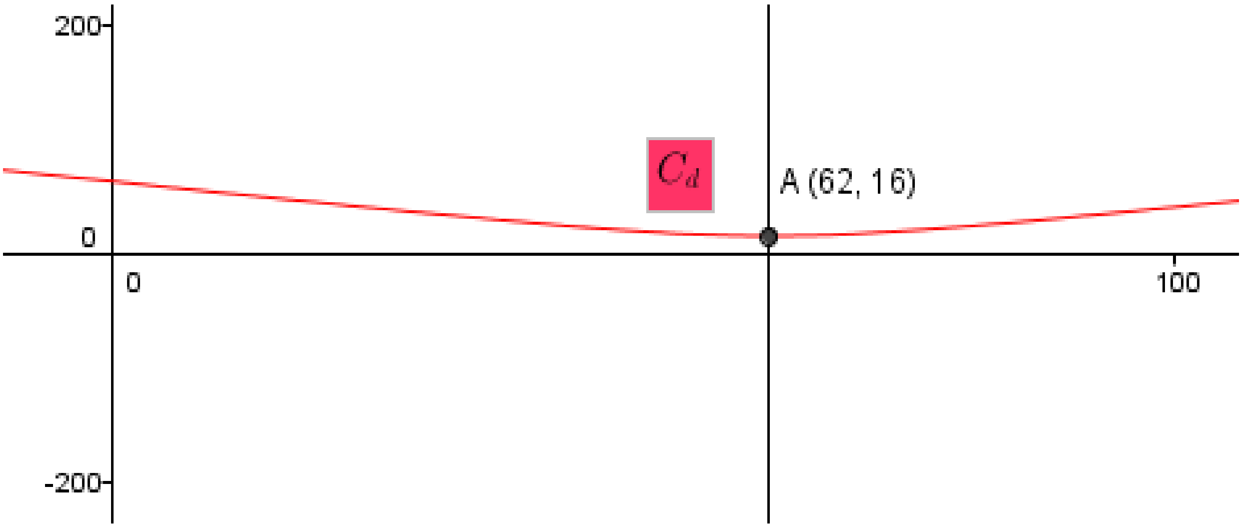
Α) Οι δύο γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι:



Β) Η γραφική παράσταση της παραβολής C_f είναι:



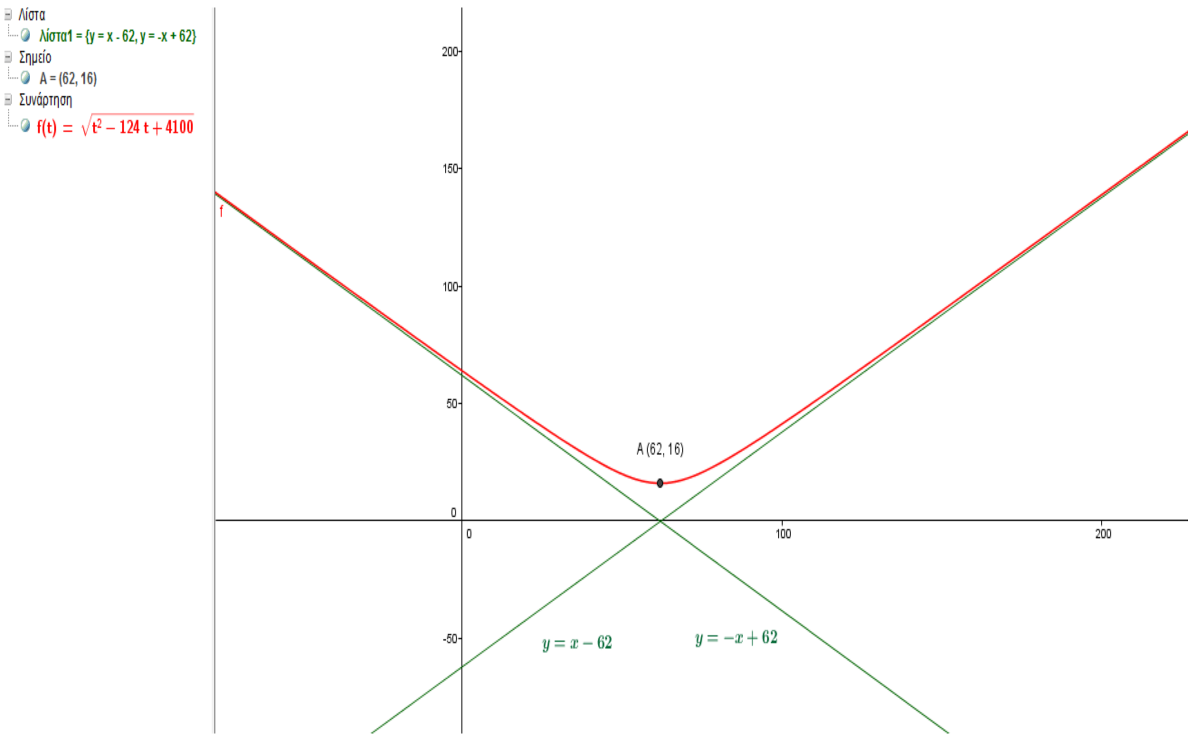
Γ) Η γραφική παράσταση της απόστασης C_d είναι:



Δ) Σχόλιο:

Η C_d είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις:

$$\psi = x - 62 \text{ και } \psi = -x + 62$$



4η Δραστηριότητα

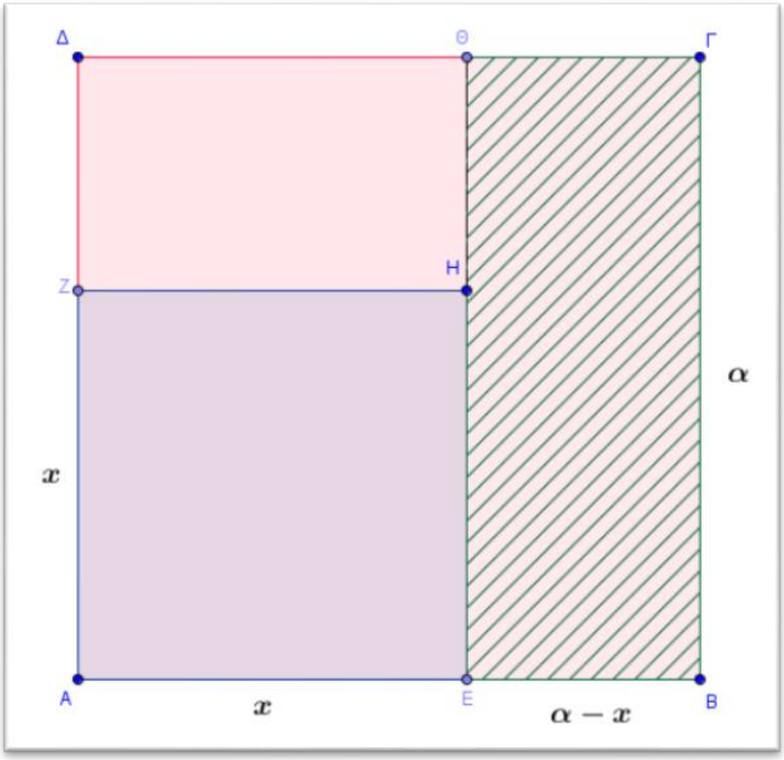
Ένα πρόβλημα για εργασία στο σπίτι ή μέσα στην τάξη (χρυσή τομή)

Α. Να διαιρεθεί ένα τμήμα ΑΒ (μήκους ΑΒ = α) σε δύο άνισα τμήματα ΑΓ και ΓΒ (με ΑΓ > ΓΒ), έτσι ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι ***μέσο ανάλογο*** (*) του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AB}{A\Gamma}$

Β. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά a και σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΕ = ΑΖ = x $\left(\text{με } \frac{1}{2}a < x < a\right)$. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{a}{x}$, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΕΗΖ είναι ίσο με το εμβαδόν του μεγαλύτερου από τα δύο ορθογώνια που σχηματίζονται στο εσωτερικό του ΑΒΓΔ, αν προεκτείνουμε την ΕΗ.

Γ. Τι κοινό έχουν οι δύο λόγοι των προηγούμενων ερωτημάτων; Τι γνωρίζετε για το λόγο αυτό;

(*) Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τα α ,δ λέγονται άκροι όροι και τα β ,γ λέγονται μέσοι όροι. Αν οι μέσοι όροι είναι ο ίδιος αριθμός, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\delta}$, τότε λέμε ότι «το β είναι μέσο ανάλογο των α και δ»



5η Δραστηριότητα

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ου}$ Βαθμού

Πρόβλημα Οικονομίας

Μία βιομηχανία παράγει **netbook.** Αν **x** είναι ο αριθμός των **netbook** που παράγονται το μήνα**,** τότε η τιμή πώλησης **T** κάθε μονάδας του προϊόντος προσδιορίζεται με βάση τον τύπο **T = 700 − x**. Το κόστος παραγωγής για κάθε μονάδα προϊόντος είναι **100** €. Αν η βιομηχανία έχει πάγια **μηνιαία** έξοδα **50.000** €, να βρεθεί πόσα **netbook** πρέπει να παράγει το μήνα ώστε να έχει κέρδος.

Στη συνέχεια, να βρείτε πόσα **netbook** πρέπει να παράγονται το μήνα, ώστε η βιομηχανία να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος (το οποίο να υπολογιστεί)

Ερωτήσεις

1. Αν τα μηνιαία έσοδα από την πώληση των **x netbook** είναι **Ε ,** να γράψετε τη συνάρτηση που εκφράζει τα έσοδα **Ε = Ε(x)**

………………………………………………………………………………………

2. Αν $\mathbf{K_\pi}$ είναι το κόστος της μηνιαίας παραγωγής των **x netbook ,** να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει το κόστος $\mathbf{K_\pi = K_\pi(x)}$

………………………………………………………………………………………

3. Αν **K** είναι το συνολικό κόστος της μηνιαίας παραγωγής **,** να γράψετε τη συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό κόστος **K = K(x)**

………………………………………………………………………………………

4. Αν το κέρδος από την πώληση των **x netbook** είναι **P ,** να γράψετε τη συνάρτηση που εκφράζει το κέρδος **P = P(x)**

………………………………………………………………………………………

5. Να βρείτε που πρέπει να κυμαίνεται η μηνιαία παραγωγή, ώστε η βιομηχανία να λειτουργεί κερδοφόρα

………………………………………………………………………………………

6. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **P(x)** που εκφράζει το κέρδος και να βρείτε πόσα **netbook** πρέπει να παράγονται το μήνα, ώστε η βιομηχανία να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος

……………………………………………………………………………………………

<u>Ενδεικτικές απαντήσεις</u>

Είναι προφανές ότι οι επιτρεπτές λύσεις για το πρόβλημα αφορούν σε τιμές x (αριθμός netbook) οι οποίες είναι θετικοί ακέραιοι.

1. $E = E(x) = xT = x(700 - x) = 700x - x^2, \; x \geq 0$

2. $K_\pi = K_\pi(x) = 100x, \; x \geq 0$

3. $K = K(x) = 100x + 50000, \; x \geq 0$

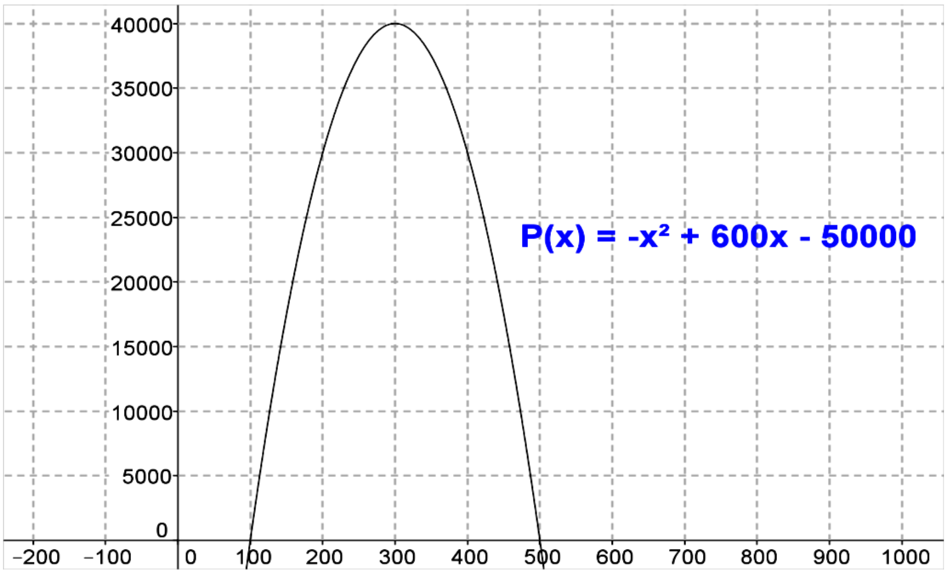
4. $P = P(x) = E(x) - K(x) = 700x - x^2 - 100x – 50000 = -x^2 + 600x – 50.000, \; x \geq 0$

5. Πρέπει $P(x) > 0$, δηλαδή $-x^2 + 600x – 50.000 > 0$

x	0 100 500 $+\infty$
$-x^2 + 600x – 50.000$	- 0 + 0 -

Επομένως x ϵ (100 , 500)

6. Από τη γραφική παράσταση της P(x)



φαίνεται ότι το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 300 netbook το μήνα.

Το μέγιστο κέρδος είναι P(300) = 40.000 €

Πραγματικά είναι:

Η γραφική παράσταση της P είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και επειδή το α = – 1 < 0 παρουσιάζει μέγιστο.

Έτσι όταν ο αριθμός των παραγόμενων netbook είναι $x = -\frac{600}{-2} = 300,$

η P έχει μέγιστη τιμή την $P_{max} = -\frac{160.000}{-4} = 40.000.$

Δηλαδή είναι $P(x) \leq 40.000$ για κάθε x ϵ (100 , 500)

Κεφάλαιο VI:

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΠΡΟΟΔΟΙ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Α: Η ακολουθία του Fibonacci

Το 1202 εκδόθηκε ένα διάσημο όσο και κλασικό βιβλίο του Fibonacci (1180 – 1250), μέσα στο οποίο υπήρχαν ορισμένα προβλήματα τα οποία ενέπνευσαν πολλούς από τους μεταγενέστερους μαθηματικούς. Το σημαντικότερο ενδεχομένως ήταν το εξής:

Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα έχουμε σε ένα χρόνο, αν ξεκινήσουμε με ένα ζευγάρι, αν κάθε μήνα το κάθε ζευγάρι γεννά ένα καινούργιο ζευγάρι το οποίο αρχίζει να αποκτά δικούς του απογόνους από το δεύτερο μήνα και μετά;

Το διάσημο αυτό πρόβλημα σχηματίζει την "ακολουθία Fibonacci"

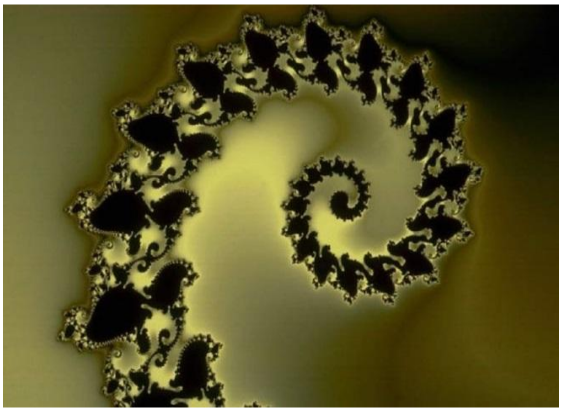
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, u_n, \ldots$$

Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι:

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ και } u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\,,\ n \geq 3$$

Η ακολουθία του Fibonacci έχει σημαντικές ιδιότητες, όπως ότι κάθε ζευγάρι διαδοχικών όρων της είναι πρώτοι μεταξύ τους και ότι το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (η χρυσή τομή).

Η ακολουθία αυτή βρίσκει επίσης εφαρμογές σε ζητήματα αφορούν στα φύλλα των δένδρων, στην οργανική ανάπτυξη, κ.λπ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Β: Τα παράδοξα του Ζήνωνα για την κίνηση (1*)

Ο Αχιλλέας και η χελώνα

Ο Αχιλλέας συναγωνίζεται μία χελώνα που ξεκίνησε πριν από αυτόν και δε θα μπορέσει ποτέ να προηγηθεί της χελώνας. Τη χρονική στιγμή που ο Αχιλλέας θα έχει φθάσει στην αρχική θέση της χελώνας, αυτή θα έχει προηγηθεί λίγο ακόμη.
Η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον και έτσι ποτέ ο Αχιλλέας δε θα φθάσει και επομένως προσπεράσει τη χελώνα.
Επομένως έχουμε το παράδοξο ότι *"ο ταχύτερος ουδέποτε θα προσπεράσει τον βραδύτερο"*

(1*) **<u>Σχόλιο</u>**:

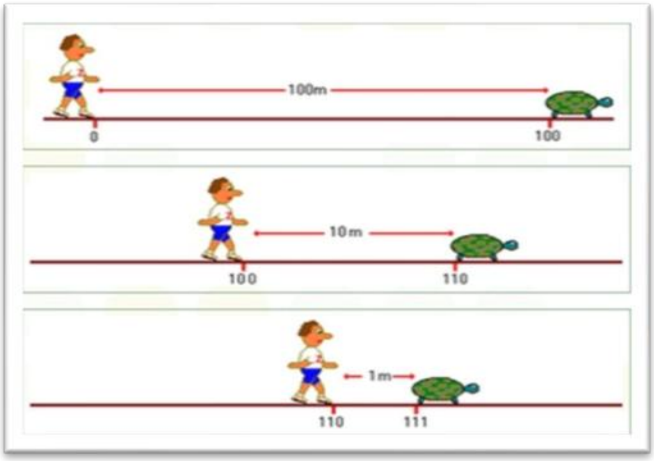
Ο Ζήνων ο Ελεάτης (έζησε γύρω στα 450 π.Χ., ανήκε στη Φιλοσοφική Σχολή του Παρμενίδη με κυρίαρχο δόγμα την ενότητα και τη συνέχεια της ύπαρξης) προσπάθησε να βρει επιχειρήματα που να αποδεικνύουν την ασυνέπεια στις έννοιες της πολλαπλότητας και της διαιρετότητας, οι οποίες ήταν κομβικές στη Φιλοσοφική Σχολή των Πυθαγορείων.
Οι Πυθαγόρειοι είχαν υποθέσει ότι ο χώρος και ο χρόνος αποτελούνται από σημεία και στιγμές, αλλά ταυτόχρονα έχουν και μια ιδιότητα που δύσκολα την ορίζουμε, παρότι εύκολα τη διαισθανόμαστε, τη *"συνέχεια"*. Τα ύστατα στοιχεία που συνιστούν ένα θέμα, θεωρούνταν ότι κατέχουν από τη μια μεριά τα χαρακτηριστικά μιας γεωμετρικής μονάδας – του σημείου – και από την άλλη, συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των αριθμών.
Ο Αριστοτέλης περιέγραψε το πυθαγόρειο σημείο ως *"τη μονάδα σε κάποια θέση"* ή *"τη μονάδα στο χώρο"*.

Τα επιχειρήματα του Ζήνωνα επηρέασαν βαθιά την ανάπτυξη των ελληνικών μαθηματικών, ισότιμα σχεδόν με την ανακάλυψη των άρρητων. Ο κόσμος των αριθμών είχε ακόμη την ιδιότητα της διακριτότητας, αλλά αυτός των συνεχών μεγεθών ήταν κάτι που δεν είχε σχέση με τους αριθμούς. Έτσι, τον μελετούσαν με γεωμετρικές μεθόδους, με συνέπεια στα Στοιχεία του Ευκλείδη ακόμη και οι ίδιοι οι ακέραιοι αντιπροσωπεύονταν από ευθύγραμμα τμήματα. Φαινόταν ότι τον κόσμο κυβερνούσε η γεωμετρία και όχι ο αριθμός

<u>ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Το Παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας.

Υποθέτουμε πως η χελώνα ξεκινάει 100m μπροστά από τον Αχιλλέα ο οποίος τρέχει με ταχύτητα 10m/s. Έστω ότι η χελώνα κινείται με ταχύτητα 1m/s. Όταν λοιπόν ο Αχιλλέας θα έχει διανύσει τα 100m, η χελώνα θα βρίσκεται 10m μπροστά του. Όταν θα διανύσει αυτά τα 10 μέτρα, η χελώνα θα βρίσκεται 1m μπροστά του. Όταν διανύσει αυτό το 1m, η χελώνα θα βρίσκεται 0,1m μπροστά του, και ούτω καθεξής. Επομένως, σύμφωνα με τον Ζήνωνα, ο Αχιλλέας δε θα προσπεράσει ποτέ τη χελώνα.

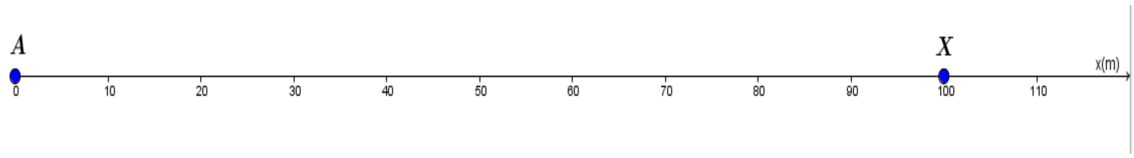


Είναι μια προφανής *αντινομία*, η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι *"το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων είναι άπειρο"*.
Η κίνηση επομένως είναι αδύνατη αν δεχθούμε την ύπαρξη των άπειρων υποδιαιρέσεων του χώρου και του χρόνου.
Να αποδειχθεί ότι ο παραπάνω ισχυρισμός, ο οποίος έρχεται σε αντίθεση με την κοινή λογική, δεν ευσταθεί και ότι ο Αχιλλέας τελικά θα φθάσει τη χελώνα μετά από χρόνο $\frac{100}{9}$ sec.

<u>1η προσέγγιση</u>

Εξισώσεις Κίνησης – Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων

Η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση, επάνω στον άξονα x΄x.
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ (έναρξη του αγώνα) ο Αχιλλέας βρίσκεται στο σημείο Α με τετμημένη $x = 0$, ενώ η χελώνα βρίσκεται στο σημείο Χ, με τετμημένη $x = 100$



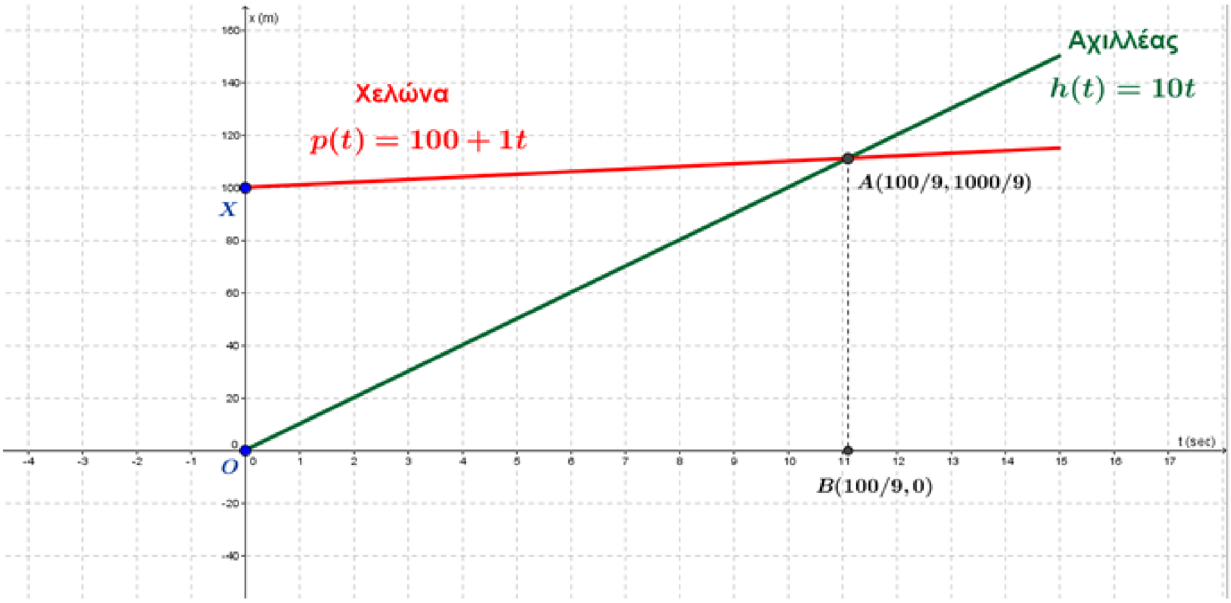
Η εξίσωση κίνησης της θέσης του Αχιλλέα κάθε χρονική στιγμή t, είναι:

$$h(t) = 10t$$

Η εξίσωση κίνησης της θέσης της χελώνας κάθε χρονική στιγμή t, είναι:

$$p(t) = 100 + 1t$$

Θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων tOx, όπου *t(s)* και *x(m)*.
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο Αχιλλέας βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, στο σημείο Ο(0,0), ενώ η χελώνα βρίσκεται στη θέση Χ(0,100).
Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων είναι:



<u>Γραφική – Διαισθητική Προσέγγιση:</u>

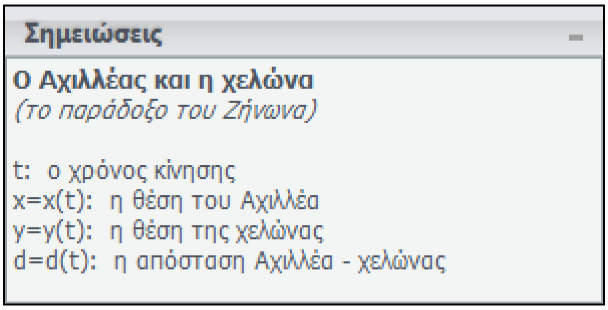
Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων είναι ευθείες οι οποίες τέμνονται (βλ. σχήμα) στο σημείο $A\left(\frac{100}{9}, \frac{1000}{9}\right)$.
Αυτό σημαίνει ότι ο Αχιλλέας και η χελώνα βρίσκονται στο ίδιο σημείο, τη χρονική στιγμή $t = \frac{100}{9}$ sec και στη συνέχεια ο Αχιλλέας προσπερνά τη χελώνα.
Επιπλέον ο Αχιλλέας, τη χρονική στιγμή που φθάνει τη χελώνα έχει διανύσει απόσταση $\frac{1000}{9}\ m$, ενώ η χελώνα μόλις $\frac{1000}{9} - 100 = \frac{100}{9}\ m$.

<u>Αλγεβρική Επίλυση:</u>

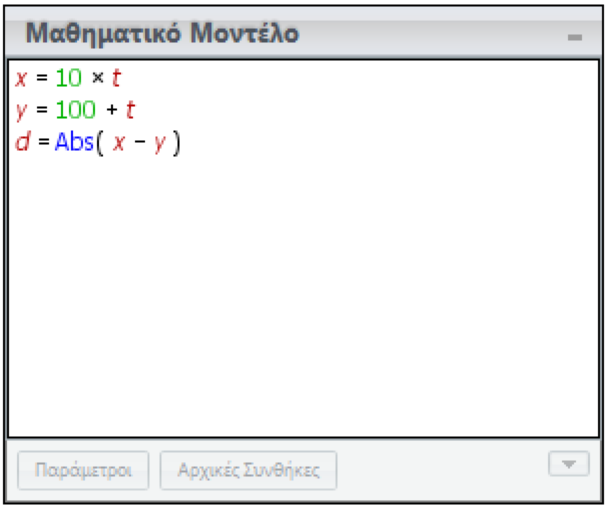
Οι δύο ευθείες τέμνονται διότι οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι:
$\alpha_h = 10 \neq 1 = a_p$.
Έστω $A(t_0, x_0)$ το κοινό τους σημείο.
Τότε $h(t_0) = p(t_0) \Leftrightarrow 10t_0 = 100 + t_0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{100}{9}$
Επίσης $x_0 = h(t_0) = p(t_0) = 10 \cdot \frac{100}{9} = \frac{1000}{9}$

Μοντελοποίηση με τη βοήθεια του λογισμικού Modellus:

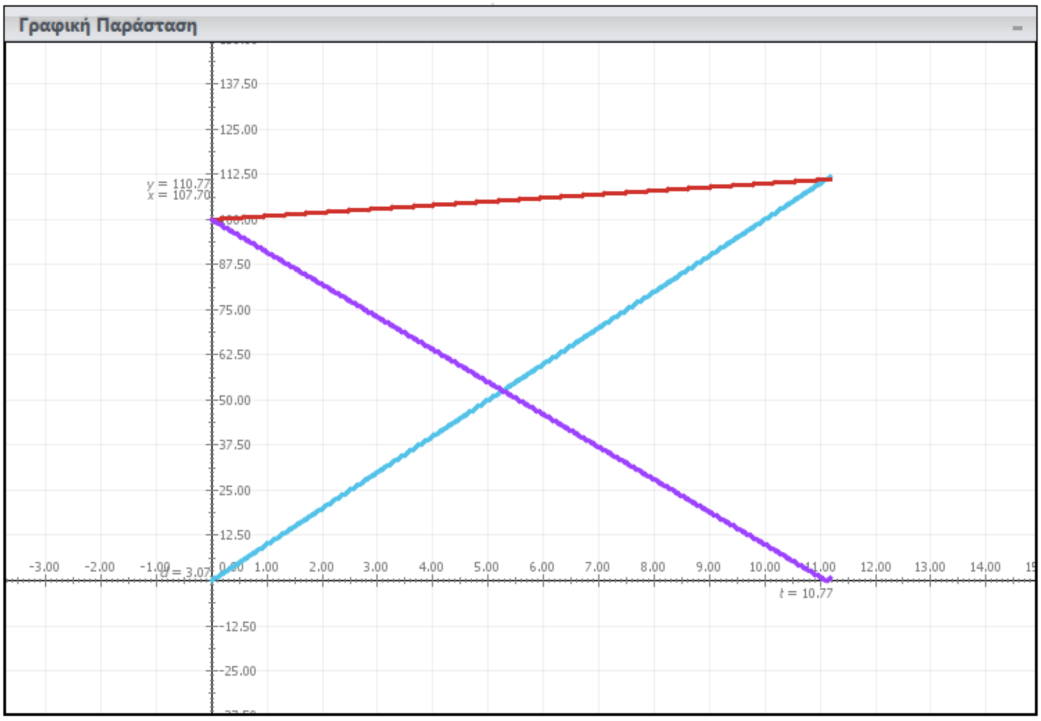
Το πρόβλημα



Το μαθηματικό μοντέλο



Η γραφική παράσταση



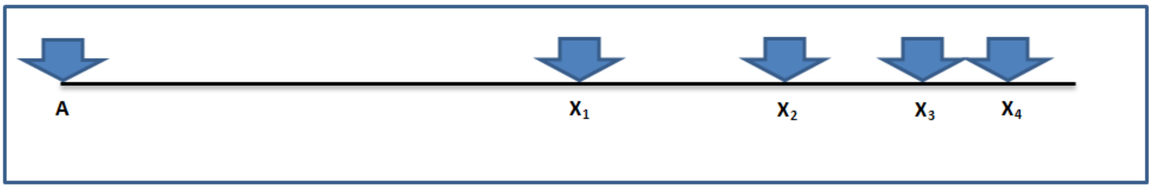
Ο πίνακας τιμών

Πίνακας

t	x	y	d
10.50	105.00	110.50	5.50
10.53	105.30	110.53	5.23
10.56	105.60	110.56	4.96
10.59	105.90	110.59	4.69
10.62	106.20	110.62	4.42
10.65	106.50	110.65	4.15
10.68	106.80	110.68	3.88
10.71	107.10	110.71	3.61
10.74	107.40	110.74	3.34
10.77	107.70	110.77	3.07
10.80	108.00	110.80	2.80
10.83	108.30	110.83	2.53
10.86	108.60	110.86	2.26
10.89	108.90	110.89	1.99
10.92	109.20	110.92	1.72
10.95	109.50	110.95	1.45
10.98	109.80	110.98	1.18
11.01	110.10	111.01	0.91
11.04	110.40	111.04	0.64
11.07	110.70	111.07	0.37
11.10	111.00	111.10	0.10
11.13	111.30	111.13	0.17
11.16	111.60	111.16	0.44
11.19	111.90	111.19	0.71

<u>2η προσέγγιση</u>

Άθροισμα απείρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου



Υποθέτουμε πως η χελώνα ξεκινάει $100m$ μπροστά από τον Αχιλλέα ο οποίος τρέχει με ταχύτητα $v_A = 10\ m/s$ ενώ η χελώνα κινείται με ταχύτητα $v_X = 1\ m/s$

Η αρχική θέση του Αχιλλέα είναι η Α και της χελώνας η X_1

Η απόσταση τους είναι:

$$AX_1 = 100\ m$$

Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση AX_1 είναι:

$$t_1 = \frac{AX1}{v_A} = 10 \text{ sec}$$

Κατά τη διάρκεια του χρόνου t_1, η χελώνα έχει προχωρήσει στη θέση X_2, διανύοντας διάστημα

$$X_1X_2 = v_X \cdot t_1 = 10m$$

Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση X_1X_2 είναι:

$$t_2 = \frac{X_1X_2}{v_A} = 1 \text{ sec}$$

Κατά τη διάρκεια του χρόνου t_2, η χελώνα έχει προχωρήσει στη θέση X_3, διανύοντας διάστημα

$$X_2X_3 = v_X \cdot t_2 = 1m$$

Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση X_2X_3 είναι:

$$t_3 = \frac{X_2X_3}{v_A} = \frac{1}{10} \text{ sec}$$

Κατά τη διάρκεια του χρόνου t_3, η χελώνα έχει προχωρήσει στη θέση X_4, διανύοντας διάστημα

$$X_3X_4 = v_X \cdot t_3 = \frac{1}{10}m$$

Ο χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας για να διανύσει την απόσταση X_3X_4 είναι:

$$t_4 = \frac{X_3X_4}{v_A} = \frac{1}{100}\ \text{sec}$$

Η κίνηση αυτή θα συνεχίζεται επ' άπειρο. Έτσι κατέληξε ο Ζήνων, ότι ο Αχιλλέας δε θα φτάσει ποτέ τη χελώνα.

Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι το άθροισμα των επιμέρους χρόνων. Δηλαδή:

$$t_{o\lambda} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 10 + \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right)$$

Η παρένθεση περιέχει το άθροισμα απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{10}$, η οποία έχει όρους που συνεχώς ελαττώνονται (απολύτως φθίνουσα).
Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα τους δίνεται από τον τύπο:

$$S_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}, \quad \textbf{(2*)}$$

Άρα $t_{o\lambda} = 10 + \frac{10}{9} = \frac{100}{9}$

Επομένως ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα σε $\frac{100}{9}\ sec$ και προφανώς θα την προσπεράσει.

(2*) **<u>Σχόλιο</u>**: Μία προσπάθεια κατανόησης του τύπου:

Ζητάμε το άθροισμα των άπειρων όρων $S_\infty = \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right)$

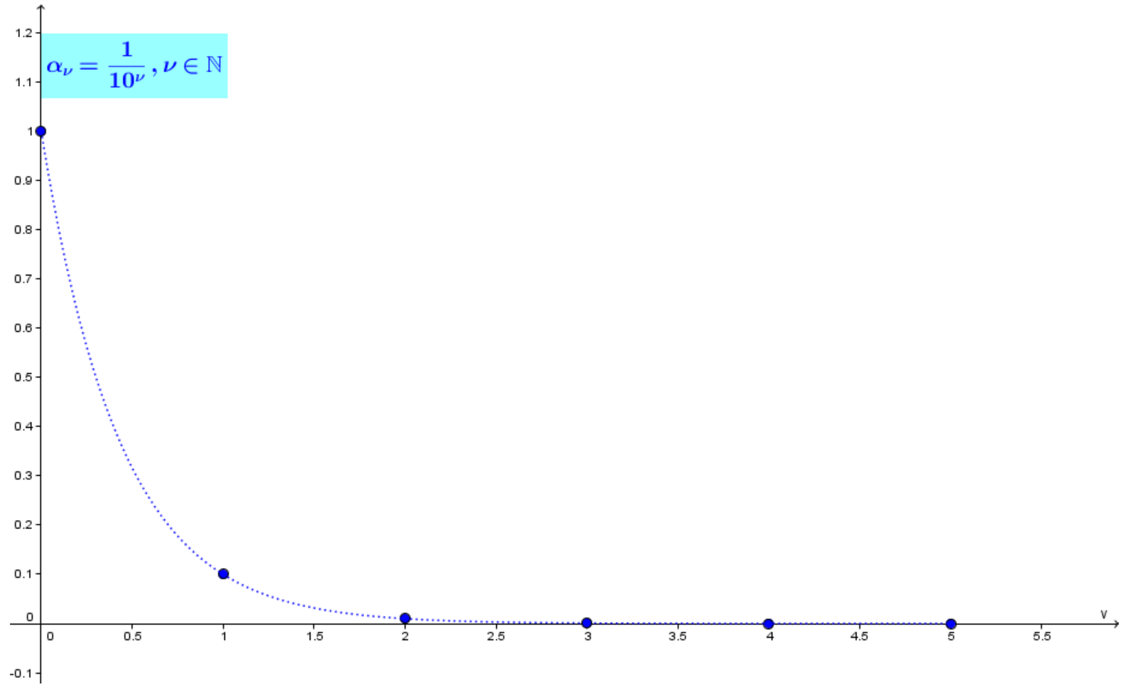
Είναι γνωστό ότι το άθροισμα του πεπερασμένου πλήθους των ν – πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, είναι:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1},\ \text{όταν}\ \lambda \neq 1\ \text{και}\ S_\nu = \nu \cdot \alpha_1,\ \text{όταν}\ \lambda = 1$$

Επομένως στο παρόν πρόβλημα είναι:

$$S_\nu = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^\nu - 1}{\frac{1}{10} - 1} \Rightarrow S_\nu = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^\nu}\right)$$

Είναι προφανές ότι όσο πιο πολλούς όρους ν πάρουμε, τόσο περισσότερο το S_ν θα προσεγγίζει το S_∞. Επιπλέον, όταν το ν μεγαλώνει, το κλάσμα $\frac{1}{10^\nu}$ γίνεται μικρότερο και όταν το ν *τείνει στο άπειρο*, το $\frac{1}{10^\nu}$ *τείνει στο μηδέν*.



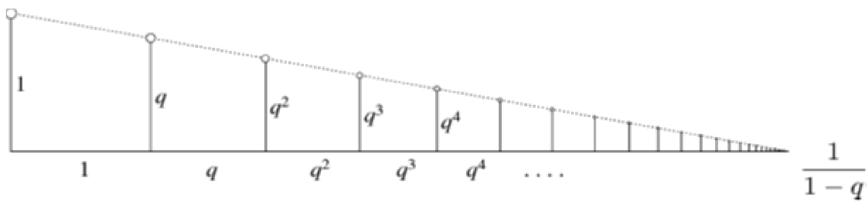
Με ορολογία *Απειροστικού Λογισμού:*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{10^\nu} = 0$$

Έτσι το $S_\infty = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^\nu}\right) = \frac{10}{9}(1-0) = \frac{10}{9}$

Υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα **"το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων να είναι πεπερασμένο"**

Μία "γεωμετρική" θέαση της γεωμετρικής σειράς με πρώτο όρο 1 και λόγο q απολύτως μικρότερο του 1:



"Geometric" view of the geometric series

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Γ: Ένα πρόβλημα συνδυασμού των δύο προόδων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σε ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται κατά τον ίδιο σταθερό αριθμό. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

α) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου

γ) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιάζονταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία θα γεμίσει για πρώτη φορά το θέατρο;

Η Μοντελοποίηση

1. Η αναγνώριση ότι το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς του θεάτρου αποτελεί αριθμητική πρόοδο.

Απάντηση:

Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται κατά τον ίδιο σταθερό αριθμό

2. Συμβολισμός των δεδομένων του προβλήματος σύμφωνα με την ορολογία των προόδων.

Απάντηση:

Έστω $\alpha_\nu,\ \nu \in N$ η αριθμητική πρόοδος, της οποίας ο κάθε όρος συμβολίζει το πλήθος των καθισμάτων της ν – σειράς.

$\alpha_1 = 70$ ο πρώτος όρος της, δηλαδή το πλήθος των καθισμάτων της $1^{ης}$ σειράς

ω η διαφορά της, δηλαδή ο σταθερός αριθμός κατά τον οποίον αυξάνεται ο αριθμός των καθισμάτων από σειρά σε σειρά

Αν κ είναι ο αριθμός των σειρών του θεάτρου, τότε το α_κ εκφράζει το πλήθος των καθισμάτων της τελευταίας σειράς.

Έτσι $\alpha_\kappa = 250$, όπου $\alpha_\kappa = \alpha_1 + (\kappa - 1)\omega$

Για την προτελευταία σειρά ισχύει: $\alpha_{\kappa-1} = 140 + \alpha_2$

3. Η αναγνώριση του πρώτου ερωτήματος ως η εύρεση της διαφοράς της αριθμητικής προόδου και η αναζήτηση, από τα δεδομένα του προβλήματος, της εξίσωσης που λύνει το πρόβλημα

Απάντηση:

Προσπαθούμε να εκφράσουμε τα δεδομένα του προβλήματα συναρτήσει του ζητούμενου αγνώστου ω.

$\alpha_1 = 70$

$\alpha_{\kappa-1} = 140 + \alpha_2 \overset{\alpha_2=\alpha_1+\omega}{\Longleftrightarrow} \alpha_{\kappa-1} = 210 + \omega$

$\alpha_\kappa = 250$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa-1} = \omega$

Έτσι έχουμε $250 - 210 - \omega = \omega \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \omega = 20$

4. Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου μπορεί να εκφραστεί από το άθροισμα των κ πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, δηλαδή $\Sigma_\kappa = \frac{\kappa}{2}(\alpha_1 + \alpha_\kappa)$ ή ο ισοδύναμος τύπος $\Sigma_\kappa = \frac{\kappa}{2}(2\alpha_1 + (\kappa-1)\omega)$.
Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται να βρεθεί πρώτα ο άγνωστος αριθμός κ, δηλαδή ο αριθμός των σειρών του θεάτρου.

Απάντηση:

$\alpha_\kappa = \alpha_1 + (\kappa-1)\omega \Leftrightarrow 250 = 70 + (\kappa-1)20 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \kappa = 10$

$\Sigma_\kappa = \frac{\kappa}{2}(\alpha_1 + \alpha_\kappa) = \frac{10}{2}(70 + 250) = 1600$

5. Η αναγνώριση ότι ο αριθμός των θεατών σε κάθε παράσταση του θεάτρου αποτελεί γεωμετρική πρόοδο και ο συμβολισμός των δεδομένων του προβλήματος σύμφωνα με την ορολογία των προόδων.

Απάντηση:

Έχουμε γεωμετρική πρόοδο, γιατί κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον σταθερό αριθμό 2 (διπλασιασμός αριθμού θεατών).

Επομένως έχουμε:

β_μ, $\mu \in N$ η γεωμετρική πρόοδος, της οποίας ο κάθε όρος συμβολίζει το πλήθος των θεατών της μ – παράστασης. Επομένως $\beta_1 = 100$

λ ο λόγος της, δηλαδή ο σταθερός αριθμός διπλασιασμού των θεατών από παράσταση σε παράσταση. Επομένως λ = 2

6. Η αναγνώριση του τρίτου ερωτήματος ως η εύρεση της τιμής του μ (η συγκεκριμένη παράσταση) για την οποία ο αριθμός των θεατών **ισούται** με το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

Απάντηση:

$\beta_\mu = \beta_1\, \lambda^{\mu-1} = 100 \cdot 2^{\mu-1}$

$\Sigma_\kappa = 1600$

Επομένως: $\beta_\mu = \Sigma_\kappa \Leftrightarrow 100 \cdot 2^{\mu-1} = 1600 \Leftrightarrow 2^{\mu-1} = 16 \Leftrightarrow 2^{\mu-1} = 2^4$

Έτσι προκύπτει ότι μ = 5

Δηλαδή κατά τη διάρκεια της $5^{ης}$ παράστασης το θέατρο γέμισε από 1600 θεατές.

Βιβλιογραφία – Bibliography

- Θεοφιλίδης, Χ.(1988), *Η τέχνη των ερωτήσεων*, Αθήνα, Γρηγόρης
- Jones, B.F., Rasmussen, C., & Moffit, M.(2002), *Real – Life Problem Solving. A Collaborative Approach to Interdisciplinary Learning*, Washington, DC: American Psychological Association

- Mayer, R.E.,(1992), *Thinking problem solving cognition*, U.S.A., W.H. Freeman and Company
- Nagel, N.G., (1996), *Learning Through Real-World Problem Solving. The power of Integrative Teaching*, U.S.A., Corwin Press
- Piaget, J., (1963), *The Origins of Intelligence in Children*. New York, W.W. Norton
- WALLE A. JOHN. VAN DE., (2007), *Διδάσκοντας μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο*, Αθήνα, Επίκεντρο
- Polya G., (1998), *Πώς να το λύσω*, Αθήνα, Καρδαμίτσας
- Philip J. Davis, Reuben Hersh, (1981), *The Mathematical Experience*, Birkhäuser
- Carl B. Boyer – Uta C. Merzbach, (1997), *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού