



Μηχανισμοί Τριχοτόμησης Γωνίας

Χαρίλαος Πίπης, Ιωάννα Πλουμάκη



Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Καλλιόπη Σιώπη, Μαθηματικός

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το γεωμετρικό πρόβλημα της διαίρεσης γωνίας σε τρία ίσα μέρη με κανόνα και διαβήτη είναι ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα που διατυπώθηκαν κατά τον 5 ο αιώνα στην αρχαία Ελλάδα. Οι προσπάθειες να επιλυθεί με τα μέσα που ορίζονται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, οδήγησαν στην αναζήτηση νέων μεθόδων, όπως της νεύσης και τεχνικών επίλυσης, με αποτέλεσμα την επινόηση μιας ποικιλίας μηχανισμών, με κάποιους από αυτούς να το αντιμετωπίζουν άμεσα.

Η εργασία εστιάζει σε *μηχανισμούς, γνωστοί και ως τριχοτόμοι, που μεσολαβούν στο να τριχοτομηθεί μια γωνία με κανόνα και διαβήτη*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- Μελέτη του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας από την άποψη της ιστορικής του προέλευσης.
- Χαρτογράφηση μηχανισμών τριχοτόμησης που αποτελούν μέρος της ιστορίας των μαθηματικών
- Ανακάλυψη των μαθηματικών της δομής και της λειτουργίας δυο επώνυμων τριχοτόμων μηχανισμών αυτών των *Ceva και Pascal*.

Η μελέτη του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας με μηχανισμού *ς* έχει σχεδιαστεί γύρω από τρία βασικά ερωτήματα: *Ποιά είναι η δομή των μηχανισμών, τι μπορούν να κάνουν και γιατί;*

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η αναζήτηση της απάντησης στο ερώτημα κατά πόσο η λύση των άλυτων γεωμετρικών προβλημάτων (τριχοτόμηση γωνίας, τετραγωνισμός του κύκλου και διπλασιασμός του κύβου) *δεν είναι δυνατή μόνο με το χάρακα και το διαβήτη* υπήρξε πολύ γόνιμη:

• Για την *Επιστήμη των Μαθηματικών*, φάνηκε ότι Γεωμετρία μόνη της δεν αρκεί αλλά απαιτείται η συνδρομή της Άλγεβρας και της Ανάλυσης.

• Επινόηθηκαν μέσα (*εργαλεία*) που οδήγησαν σε πολλές αξιοθαύμαστες λύσεις οι οποίες, αν και δεν πληρούν τους περιορισμούς των εκφωνήσεων των αρχικών προβλημάτων, αποτελούν λύσεις ευρύτερης αποδοχής.

• Αναπτύχθηκε η *Κινηματική Γεωμετρία*, η γεωμετρία που επιτρέπει την κίνηση και την περιστροφή συνδεσμολογιών με σκοπό την επίλυση προβλήματος το οποίο δεν επιλύεται στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Συνυφασμένες με τη λύση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας είναι:

- η εισαγωγή με *κινηματικό* ορισμό μιας νέας καμπύλης από τον Ιππία τον 5^ο αι. π. Χ., της *τετραγωνίζουσας*
- η εφαρμογή μέσω κίνησης από τον Αρχιμήδη της μεθόδου της *νεύσης*

Πολλοί άλλοι μετά από τον Ιππία και τον Αρχιμήδη ακολούθησαν, όπως οι Νικομήδης, Πάππος, Leonardo da Vinci, κ.α. γεγονός που ενισχύει την άποψη ότι το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών και συνέβαλλε στην πρόοδο της επιστήμης των μαθηματικών και την κατανόηση της κατάστασης του προβλήματος.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ

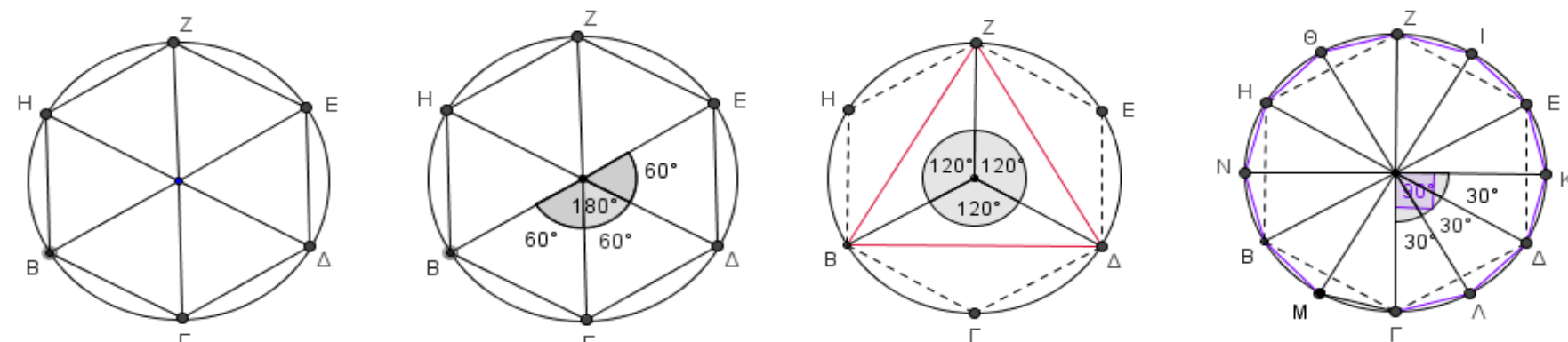
Χάρακας –διαβήτης:

- ** Διχοτόμηση γωνίας (: δυνατότητα διαιρέσεώς της σε 4, 8, 16 και γενικά σε 2ⁿ ίσα μέρη)
- ** Γεωμετρικές κατασκευές (: ισοπλεύρου τριγώνου – εξαγώνου).
- ** Εγγραφές κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

Δυνατότητα τριχοτόμησης γωνιών ίσων με 360°, 180° και 90° μέσα από την κατασκευή *ισοπλεύρου τριγώνου, κανονικού εξαγώνου και κανονικού δωδεκαγώνου*, αντίστοιχα

?

Εφικτή η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας μέσω της κατασκευής κανονικού πολυγώνου ;



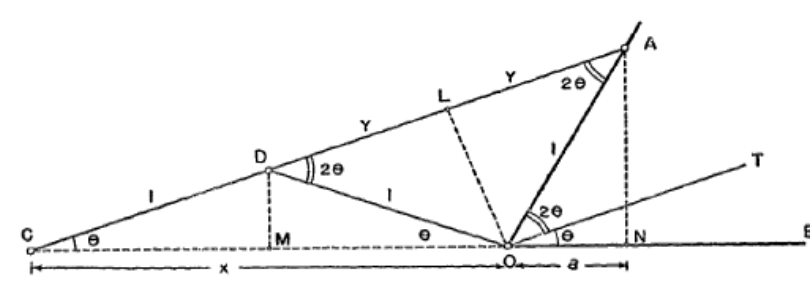
Σχήμα 1: Το εξάγωνο ως γεωμετρικό μοντέλο τριχοτόμησης γωνιών 180°, 360° και 90.º

Γιατί όμως δεν μπορεί να τριχοτομηθεί μια οποιαδήποτε κυρτή γωνία;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Αν CO=x AD=2y και ON=a από τα όμοια τρίγωνα θα προκύψουν οι σχέσεις

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{x+a}{1+2y} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+a}{1+2y} \\ \frac{x}{2} &= \frac{1+y}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1+y}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x - 2a = 0$$



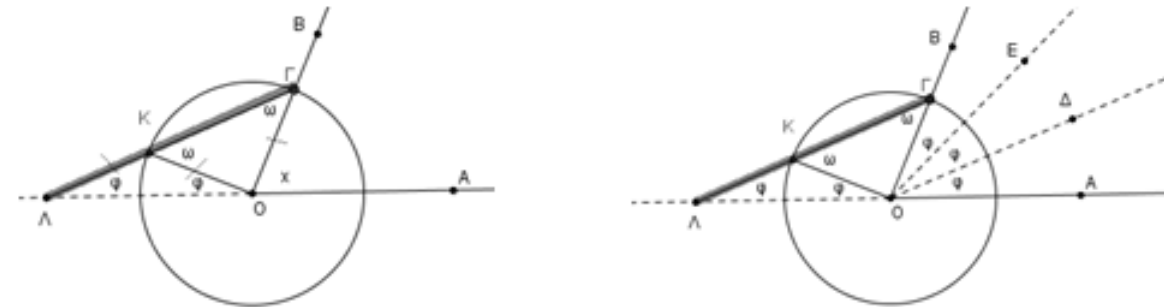
Σχηματική αναπαράσταση της Γεωμετρικής προσέγγιση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας, στο Yates (1942).

Η κατασκευή με χάρακα-διαβήτη των ριζών αυτής της εξίσωσης είναι δυνατή μόνο αν μπορεί η εξίσωση να αναλυθεί σε γινόμενο δυο παραγόντων, ενός 1^{ου} βαθμού και ενός 2^{ου} βαθμού, κάτι που αποδείχθηκε το 1837 ότι δεν είναι δυνατό να γίνει για οποιαδήποτε γωνία. (Μπρίκας, 1970; Yates, 1942)

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η κινηματική Γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί ότι γεννήθηκε στην αρχαία Ελλάδα με τη *νεύση* του Αρχιμήδη.

Διαδικασία κατασκευής ενός ευθυγράμμου τμήματος συγκεκριμένου μήκους μεταξύ δυο δεδομένων *‘γραμμών’*, ευθείες ή καμπύλες, έτσι ώστε τα άκρα του τμήματος να βρίσκονται πάνω στις *‘γραμμές’* και το ίδιο το τμήμα ή η προέκτασή του να διέρχεται, να *‘νεύει’*, να *‘σκοπεύει’* προς ένα δοσμένο σημείο (πόλο της νεύσης).



Σχηματική αναπαράσταση της τριχοτόμησης γωνίας με τη μέθοδο της νεύσης.

Οι δεδομένες γραμμές που εξέταζαν οι αρχαίοι γεωμέτρες ήταν συνήθως η ευθεία και ο κύκλος (η περιφέρεια).

Η μέθοδος της νεύσης δε δίνει καμιά πληροφορία για τη φύση της καμπύλης, η οποία μπορεί να είναι απλή ή αρκετά πολύπλοκη

Η τριχοτόμηση της γωνίας AOB επιτυγχάνεται φέρνοντας την παράλληλη στην ΛΓ από το Ο και με διχοτόμηση της γωνίας ΔΟΒ στη συνέχεια.

ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΤΡΙΧΟΤΟΜΟΙ

• Στο πλαίσιο της κινηματικής γεωμετρίας μια μεγάλη ποικιλία μηχανισμών έχουν επινοηθεί για την επίλυση του προβλήματος της τριχοτόμησης.

• Μια υποκατηγορία των μηχανισμών για άμεση τριχοτόμηση είναι συνήθως συνδεσμολογίες άκαμπτων ράβδων που συνδέονται με συνδέσμους σχηματίζοντας απλά γεωμετρικά σχήματα όπως ισοσκελή τρίγωνα, ρόμβους, ισοσκελή τραπέζια κ.ά.

• Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει σε δυο μηχανικούς τριχοτόμους, του Ceva (: ιταλός μαθηματικός, είναι γνωστός για την απόδειξη θεωρήματος στη γεωμετρία που φέρει το όνομά του) και του E. Pascal (πατέρας του δίστημου μαθηματικού και φιλόσοφου Μπελζ Πασκάλ)



(α), (β), (γ), (δ), (ε) Μηχανικοί τριχοτόμοι (<http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html>)

ΤΡΙΧΟΤΟΜΟΣ ΤΩΝ CEVA

ΤΡΙΧΟΤΟΜΟΣ PASCAL

•Υποθέσεις λειτουργίας των μηχανισμών

α) οι τέσσερις ράβδοι PA, PD, PE και PC είναι ίσες, β) το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι αρθρώσεις O, A, P και C είναι ρόμβος. γ) οι αρθρώσεις A,B,D και C σχηματίζουν τα ισοσκελή τρίγωνα EBC και ABD.

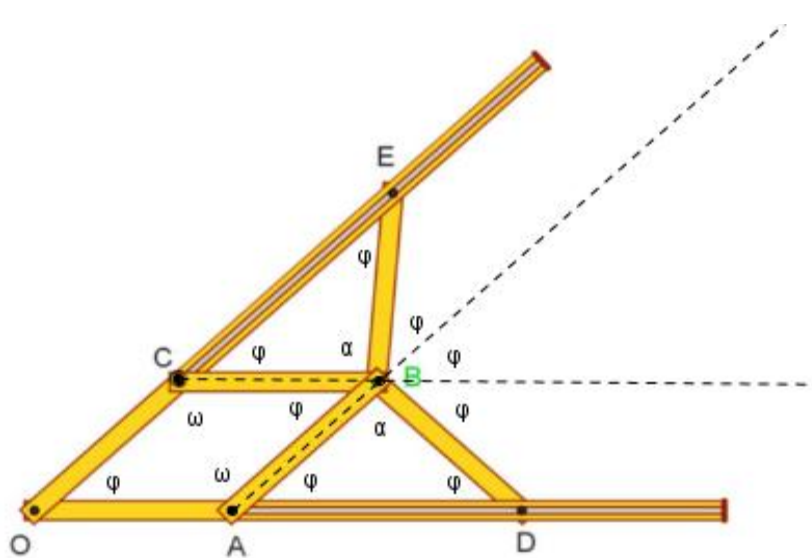
α) τρεις ράβδοι ενώνονται ανά δύο με τις αρθρώσεις A, O και B έτσι ώστε PA=AO=OB, β) τα τρίγωνα PAO και AOB είναι ισοσκελή.

• Η παραλληλία OE // AB και BC//OD επιτρέπει τη μεταφορά της γωνία COA του ρόμβου στη γωνία EBD έτσι ώστε EBD=3 COA .

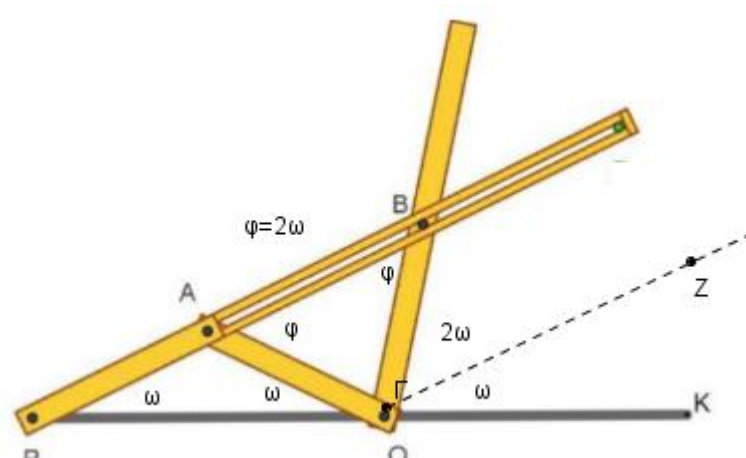
• Οι φορείς των πλευρών AB και CB τριχοτομούν τη γωνία EBD.

• Σχέσεις γωνιών στα τρίγωνα PAO, AOB και BPO επιτρέπουν τη μεταφορά της γωνίας BPO στην εξωτερική γωνία BOK του τριγώνου BPO έτσι ώστε BOK=3APO.

• Η κατασκευή με κανόνα –διαβήτη της OZ//PB από το σημείο O και η διχοτόμηση της γωνίας ZOB οδηγεί στην τριχοτόμηση της γωνίας BOK.



Λειτουργία μηχανισμού
'Νεύσης' του Αρχιμήδη



Εξήγηση της λειτουργίας των συνδεσμολογιών ως εργαλεία τριχοτόμησης γωνίας με βάση τα σχηματικά αντίγραφα τους.

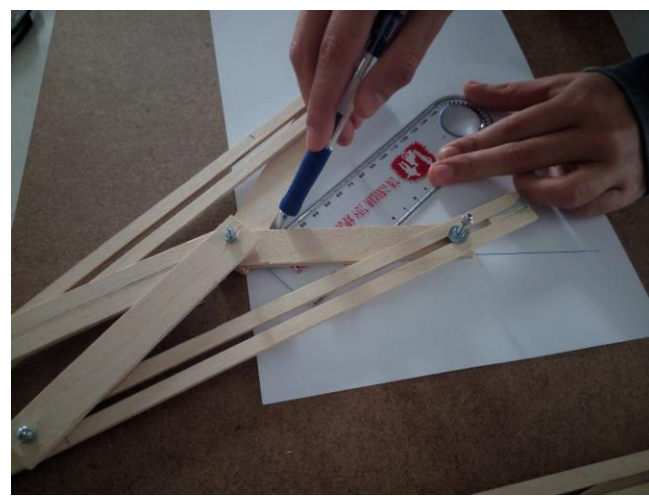
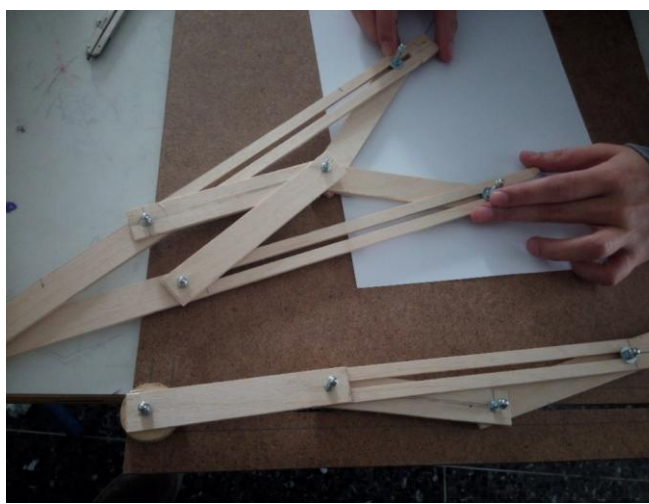
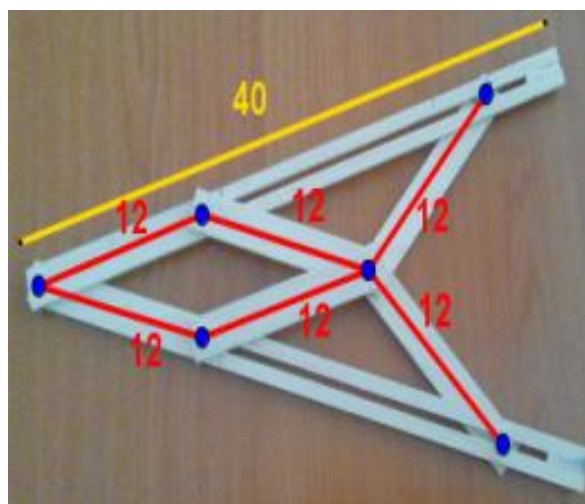
•Υποθέσεις για τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των μηχανισμών

Όταν τα E και D ολισθαίνουν στις εγκοπές των ράβδων OE και OP:
• αρθρώσεις O, A, C και B δίνουν τη δυνατότητα μετασχηματισμού της μορφή του ρόμβου OABC και των ισοσκελών τριγώνων ABP και CBE..
• διατηρούνται τα μήκη των πλευρών των σχημάτων,
• μεταβάλλονται οι γωνίες, όχι όμως οι μεταξύ τους σχέσεις.

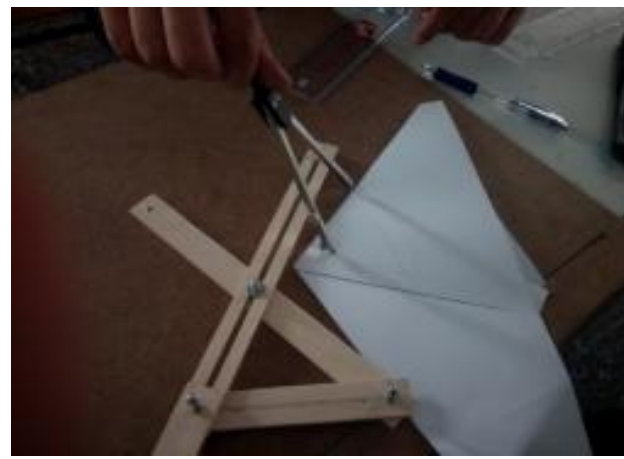
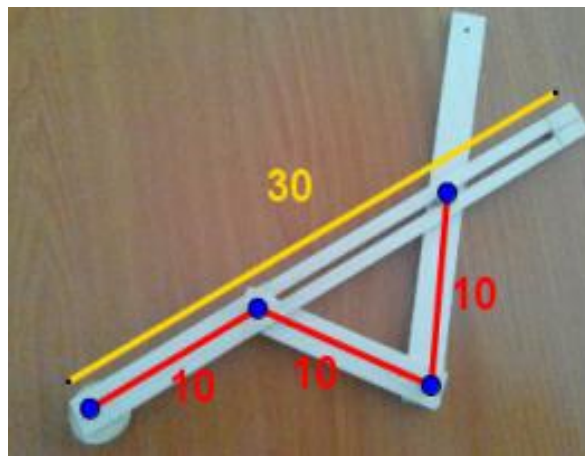
Όταν ο σύνδεσμος O ολισθαίνει στην εγκοπή:
• συμπαρασύρει την ολίσθηση του B ολισθαίνει στην εγκοπή της ράβδου PB.
• οι αρθρώσεις A και O δίνουν τη δυνατότητα μετασχηματισμού της μορφή των ισοσκελών τριγώνων PAO και AOB,
• διατηρούνται τα μήκη των πλευρών των σχημάτων
• μεταβάλλονται οι γωνίες, όχι όμως οι μεταξύ τους σχέσεις..

Κατασκευή και Χρήση Υλικών αντιγράφων των τριχοτόμων του Ceva και Pascal για την τριχοτόμηση γωνιών

Για την κατασκευή και τον έλεγχο της λειτουργίας των μηχανισμών λάβαμε υπόψη τα συμπεράσματά μας για τις γεωμετρικές ιδιότητες της δομής του καθενός. Οι ράβδοι που χρησιμοποιήσαμε για την κατασκευή τους ήταν ξύλινες και έφεραν οπές σε συγκεκριμένες θέσεις ώστε να δίνεται η δυνατότητα η σύνδεσή τους να γίνεται με τέτοιο τρόπο που να διατηρούνται οι γεωμετρικές ιδιότητες που αναγνωρίσαμε στη φάση διερεύνησης του σχηματικού αντιγράφου του κάθε μηχανισμού.



• Ξύλινο αντίγραφο τριχοτόμου Ceva- διαστάσεις και τρόπος σύνδεση των ράβδων- τρόπος εφαρμογής του μηχανισμού για την τριχοτόμηση γωνίας



• Ξύλινο αντίγραφο τριχοτόμου Pascal - διαστάσεις και τρόπος σύνδεση των ράβδων- τρόπος εφαρμογής του μηχανισμού για την τριχοτόμηση γωνίας

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

• Το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας είναι από μόνο του ενδιαφέρον και οποιαδήποτε απόδειξη ή διαδικασία που θα σχετιζόνταν με αυτό μόνο σε θεωρητικό επίπεδο θα περιορίζε το ενδιαφέρον.

Η έρευνα του προβλήματος έδωσε τη δυνατότητα προσέγγισης των χαρακτηριστικών νέων εργαλείων που η ύπαρξη και το ρόλο τους στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων δε συζητείται κατά τη διδασκαλία .

Η διερεύνηση των χαρακτηριστικών και της λειτουργίας των μηχανικών τριχοτόμων (σχηματικών και υλικών αντιγράφων) έδωσε τη δυνατότητα:

** να γίνουν αντιληπτά οι δυνατότητες και οι περιορισμοί των μαθηματικών εργαλείων (γεωμετρικών και αλγεβρικών) στην επίλυση προβλημάτων και ο ρόλος τους στην εξέλιξη της γεωμετρικής θεωρίας.

** να οικοδομήσουμε νέες γνώσεις που αφορούν γεωμετρικές έννοιες (καμπύλες) και διαδικασίες, όπως αυτή της νεύσης.

** τη ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε γνώσεις της γεωμετρικής θεωρίας

** να αποκτήσει νόημα η γεωμετρία με την αξιοποίηση του περιεχομένου (γεωμετρική θεωρία και ιστορικά σημειώματα) του σχολικού βιβλίου της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάκης Σ., Σίδερης Π. *Ευκλείδεια Γεωμετρία*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα. Ανακτήσιμο από <http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A101/574/3720,16296/>
- Μπρίκας Μ. Α. (1970). *Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας*. Αθήνα.
- Yates, R., C. (1942): *The trisection problem*. National Mathematics Magazine, 16.4 171-182. [ανακτήσιμο από <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED058058.pdf>]
- Taimina, D., Pan, B., Gay, G., Saylor, J., Hembrooke, H., Henderson, D., & Paventi, C. (2007). Historical mechanisms for drawing curves. *Hands On History: A Resource for Teaching Mathematics*, 89-104