



Η τεχνική της ‘Συμπλήρωσης τετραγώνου’ με χρήση Lego

Θεοδώρα Αγγελή , Κατερίνα Αυγερινού , Νίκος Γουργουλέτης , Βέρα- Λυδία Δημητρακοπούλου , Ελισάβετ Ζαχαρίου

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Καλλιόπη Σιώπη, Μαθηματικός
Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Καθώς τα μαθηματικά εξελίσσονται, οι τεχνικές που επιβιώνουν είναι αυτές που έχουν τη μεγαλύτερη δύναμη και είναι γενικού χαρακτήρα.

Η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου είναι μια τεχνική που βρίσκει εφαρμογές στην εύρεση των τύπων των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης, στη μελέτη των ιδιοτήτων της συνάρτησης με μορφή τριωνύμιου και των σχετικών με το τριώνυμο μετασχηματισμών της μορφής του καθώς, και στην επίλυση προβλημάτων άλλων επιστημονικών πεδίων όπως της φυσικής. Περιλαμβάνει μια σειρά αλγεβρικών βημάτων και η προσθαφαίρεση του όρου $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ φαίνεται σαν ένα ‘τέχνασμα’ που εξυπηρετεί το μετασχηματισμό της μορφής του τριωνύμιου / της δευτεροβάθμιας εξίσωσης σε μια ‘βολική’ μορφή που τελικά οδηγεί στους τύπους των ριζών της. Ο προσδιορισμός «συμπλήρωση τετραγώνου» έχει διττή ερμηνεία: από την πλευρά της άλγεβρας σχετίζεται με την έννοια της τετραγωνικής δύναμης πραγματικού αριθμού και από την πλευρά της γεωμετρίας με το εμβαδό τετραγώνου

Η εργασία εστιάζει στη γεωμετρική πτυχή της μεθόδου και οπτικοποιεί τις διαδικασίες παραγωγής των τύπων των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης με αντικείμενα Lego, ως έναν εναλλακτικό τρόπο ερμηνείας και απόδοσης νοήματος στις αλγεβρικές διαδικασίες της .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- Διερεύνηση την προέλευση της μεθόδου της ‘συμπλήρωσης τετραγώνου’
 - Εστίαση στη γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης
- Οπτικοποίηση της γεωμετρικής ερμηνείας των αλγεβρικών διαδικασιών της μεθόδου με χρήση αντικειμένων Lego.

Είναι η τεχνική της ‘συμπλήρωσης τετραγώνου’ ένα μαθηματικό ‘τέχνασμα’; Ποιο είναι το νόημά της και ποια τα χαρακτηριστικά της :

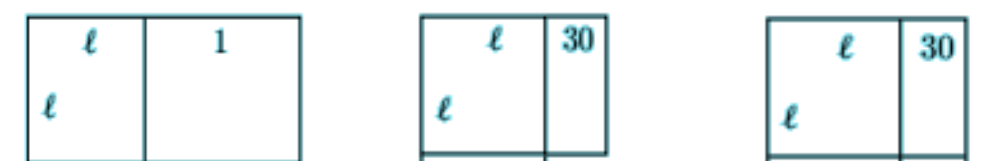
ΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Βαβυλώνιοι: Από τους πρώτους λαούς που έλυναν εξισώσεις 2^{ου} βαθμού σε αριθμητικά προβλήματα υπολογισμού μήκους και εμβαδού τετραγώνου ή ορθογωνίου (Θωμάδης, 2011; Melville, 2005).

Πρόβλημα	Πρόσθεσε την επιφάνεια και την πλευρά του τετραγώνου μου και βρήκα 0:45 (0,75)	
Βήμα 1	Πάρε 1	0:60 (1)
Βήμα 2	Χώρας το στη μέση	0:30 (0,50) και 0:30 (0,50)
Βήμα 3	Πολύπλασσε το 0:30 με το 0:30. Θα βρεις 0:15	0:30 (0,50) x 0:30 (0,50) = 0:15 (0,25)
Βήμα 4	Πρόσθεσε το 0:15 στο 0:45. Αποτέλεσμα 1	0:15 (0,25) + 0:45 (0,75) = 0:60 (1)
Βήμα 5	Η τετραγωνική ρίζα του 1 είναι το 1	Η τετραγωνική ρίζα του 0:60 (1) είναι 0:60 (1)
Βήμα 6	Αφαιρέσε από το 1 το 0:30 που είχες πολύπλασάσει με τον εαυτό σου.	0:60 (1) - 0:30 (0,50) = 0:30 (0,5)
Συμπέρασμα	Η πλευρά του τετραγώνου είναι 0:30 (0,5)	

Πρόβλημα 1, Βαβυλωνιακή πλάκα BM 13 901

Γεωμετρική ερμηνεία της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος με τα χαρακτηριστικά cut-and-paste:

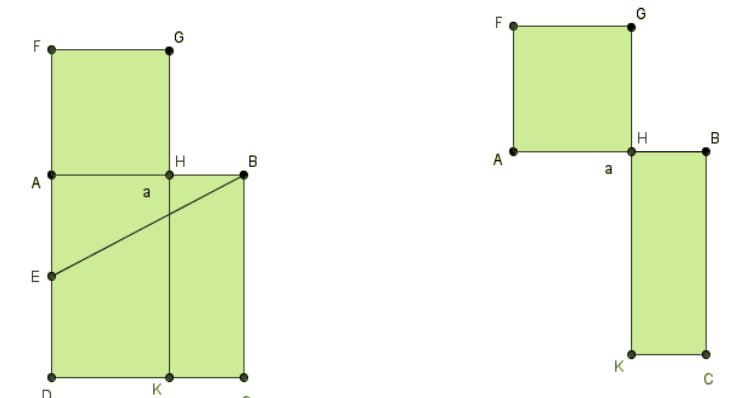


Με σύγχρονο συμβολισμό το πρόβλημα μαθηματοποιείται με την εξίσωση : $l^2 + l = 0,75$ και η σχηματική του μορφή με την εξίσωση : $l(l + 1) = 0,75$

$$l(l + 1) = 0,75 \rightarrow l(l + 0,5 + 0,5) = 0,75 \rightarrow l^2 + 0,5l + 0,5l = 0,75 \rightarrow l^2 + 0,5l + 0,25 = 0,75 + 0,25 \rightarrow l^2 + 2 \cdot 0,5l + (0,5)^2 = 1 \rightarrow (l + 0,5)^2 = 1 \rightarrow l + 0,5 = 1 \rightarrow l = 1 - 0,5 \rightarrow l = 0,5$$

Αρχαίοι Έλληνες: Πρόταση II.11 του Βιβλίου II των Στοιχείων του Ευκλείδη που είναι γνωστή ως πρόβλημα διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο:

Την δοθείσαν εύθειαν τεμείν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὁλῆς καὶ τοῦ ἐτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Σχηματική αναπαράσταση της λύσης της II.11 του Βιβλίου II των Στοιχείων του Ευκλείδη

Εξίσωση: $a(a - x) = x^2$ $x^2 + ax = a^2$

ὁμως.....

*** Δεν υπάρχει μία γενική δευτεροβάθμια εξίσωση με τη μορφή $ax^2 + bx + c = 0$

*** Επιλύονται εξισώσεις συγκεκριμένων τύπων που έχουν συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ίσο με 1, με τους συντελεστές b και c να είναι πάντα θετικοί αριθμοί ή να εκφράζουν γεωμετρικό μήκος (: το b) και εμβαδό (: το c) και με θετικές ρίζες:

$$x^2 = c \quad x^2 = bx \quad x^2 + bx = c \quad x^2 + c = bx$$

*** Δε συναντάται εξίσωση της μορφής $x^2 + bx + c = 0$ καθώς αυτή δεν έχει θετικές ρίζες αφού $\Delta = b^2 - 4c < b^2$ οπότε $\sqrt{b^2 - 4c} < \sqrt{b^2}$ ή ισοδύναμα $\sqrt{b^2 - 4c} < b$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0 \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΠΛΗΡΩΣΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

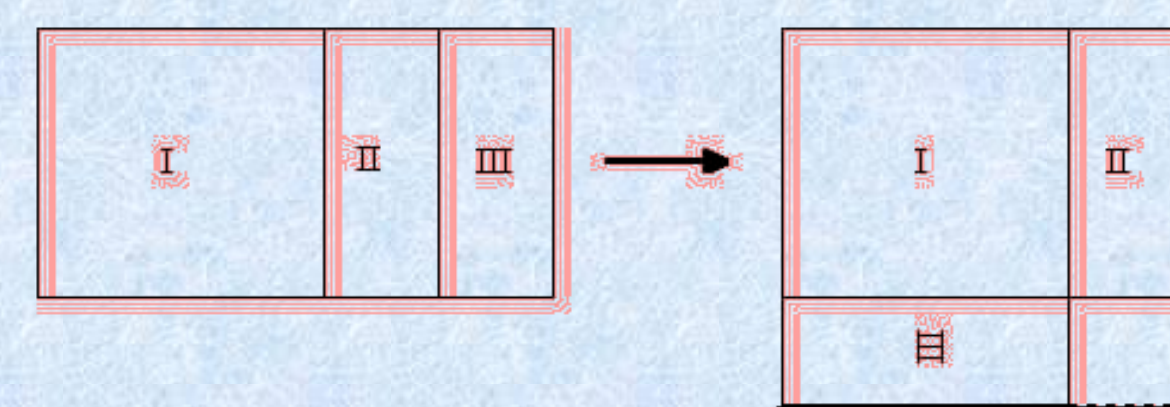
Αν θέλετε να μετατρέψετε ένα επίμηκες σε ένα τετράγωνο, πάρτε τη μικρότερη πλευρά του επίμηκους για πλευρά του τετραγώνου. Χωρίστε το υπόλοιπο [το μέρος του επίμηκους το οποίο μένει μετά την κοπή του τετραγώνου] σε δύο μέρη και αναστρέφοντας (τις θέσεις τους) εντάξτε αυτά τα δύο τμήματα σε δύο πλευρές [διαδοχικές] του τετραγώνου. (Παίρνουμε έτσι ένα μεγάλο τετράγωνο μια γωνία του οποίου είναι γωνία του μικρού τετραγώνου που κόπηκε). Γεμίστε το άδειο μέρος [στη γωνία] με την προσθήκη ενός κομματιού (ένα μικρό τετράγωνο). Αυτό έχει διδάξει πως μπορεί να εκπέσει (να αφαιρεθεί το προστιθέμενο κομμάτι)

Πρόταση Sutra 54

Βιβλίο Sulba Sutram του Baudhayana (Henderson , 2013)

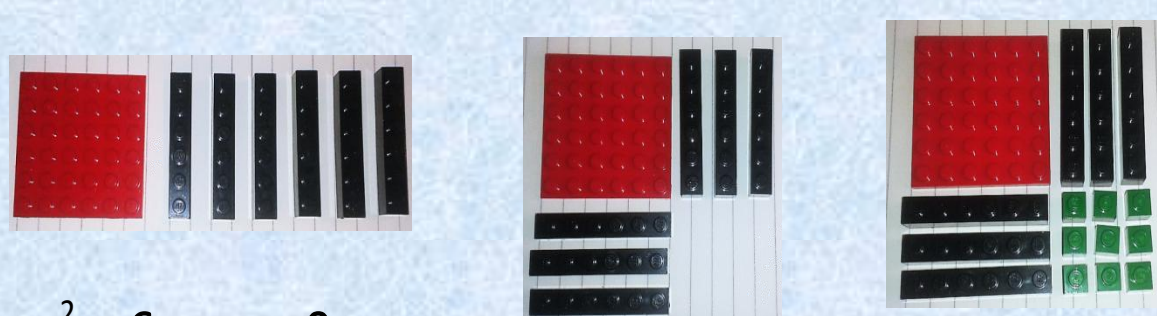
Πρόταση Sutra 51

Προσθέτοντας το μικρό τετράγωνο στη γωνία θα πάρετε ένα μεγαλύτερο τετράγωνο που είναι ίσο με το επίμηκες συν το μικρό τετράγωνο, ως εκ τούτου, θα πρέπει να αφαιρέσετε το μικρό τετράγωνο από το μεγάλο τετράγωνο και στη συνέχεια μας μένει ένα τετράγωνο το οποίο είναι ίσο με το επίμηκες



Σχηματική αναπαράσταση των προτάσεων Sutra 51 και 54 (Henderson , 2013).

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ LEGO



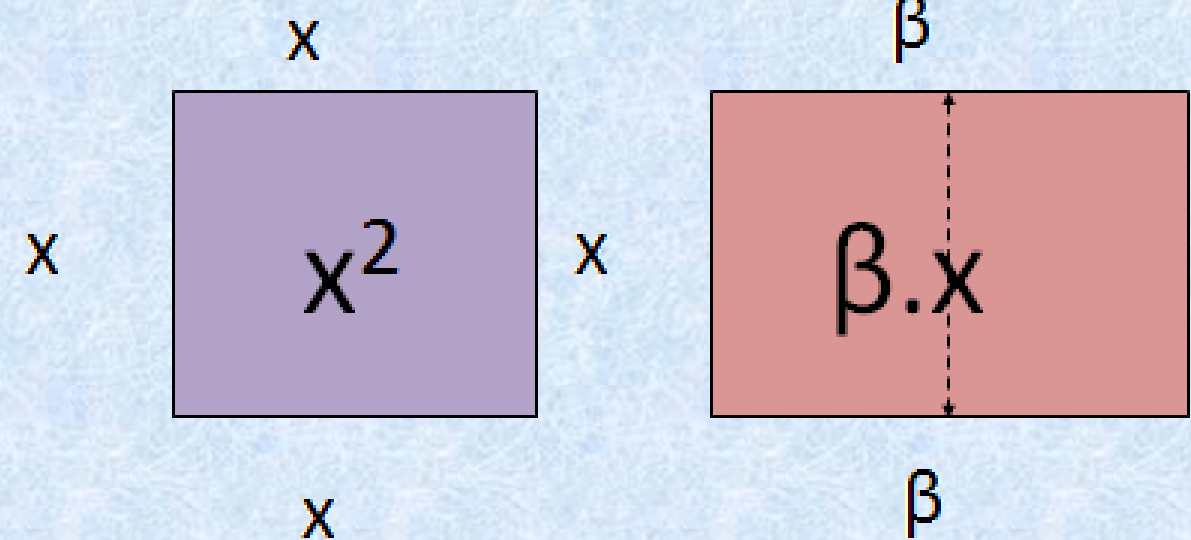
$$x^2 + 6x + c = 0$$

$$x^2 + 3x + c = 0 \xrightarrow{-4} 4x^2 + 12x + 4c = 0 \rightarrow (2x)^2 + 6(2x) + 4c = 0 \rightarrow t^2 + 6t + c' = 0$$

$$2x^2 + 3x + c = 0 \xrightarrow{-8} 16x^2 + 24x + 8c = 0 \rightarrow (4x)^2 + 6(2x) + c' = 0 \rightarrow t^2 + 6t + c' = 0$$

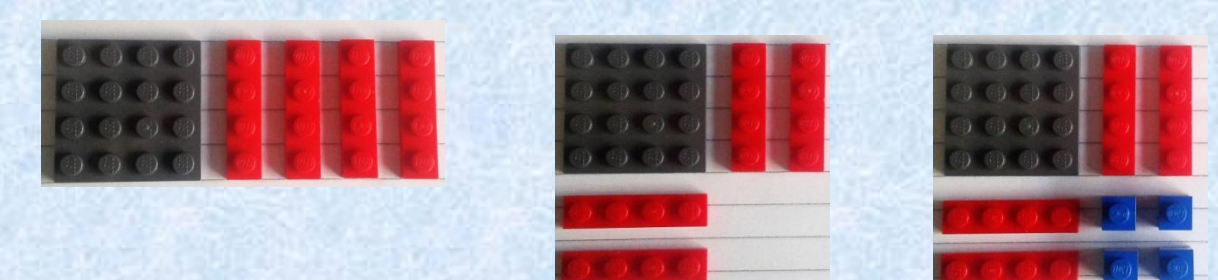
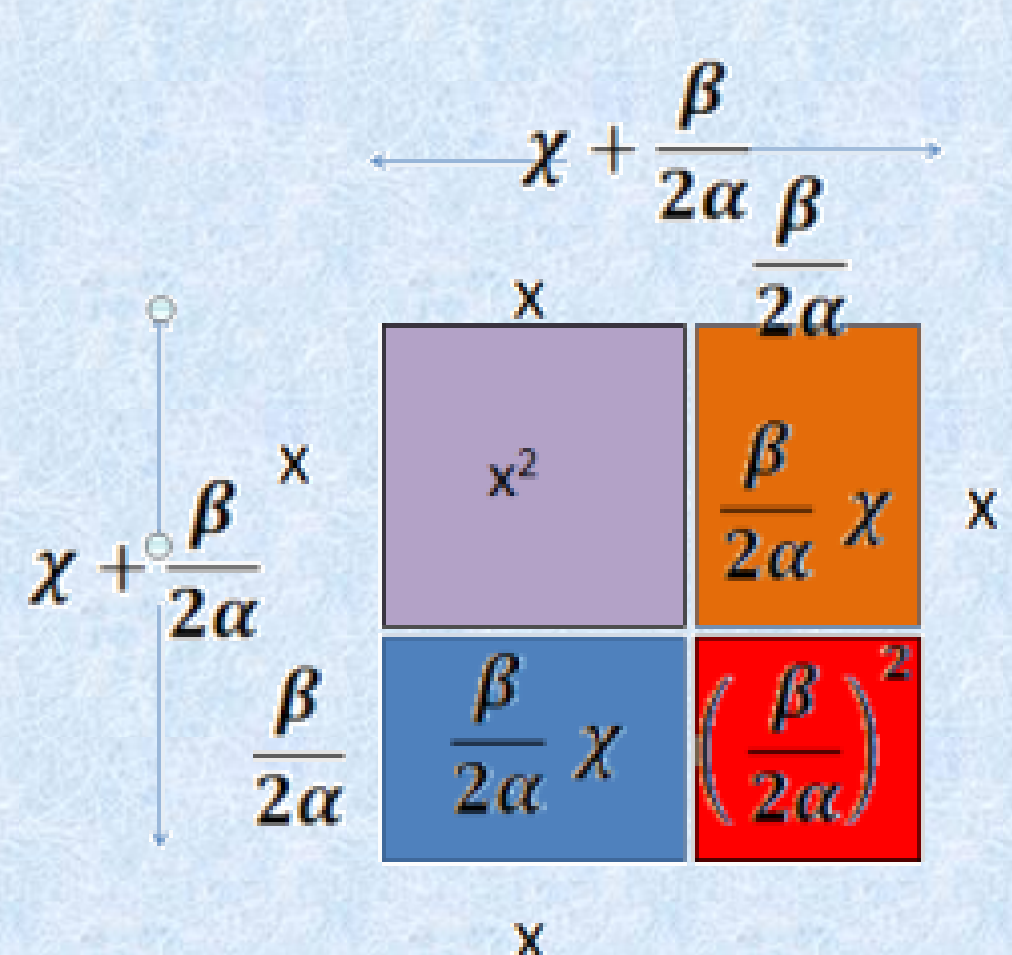
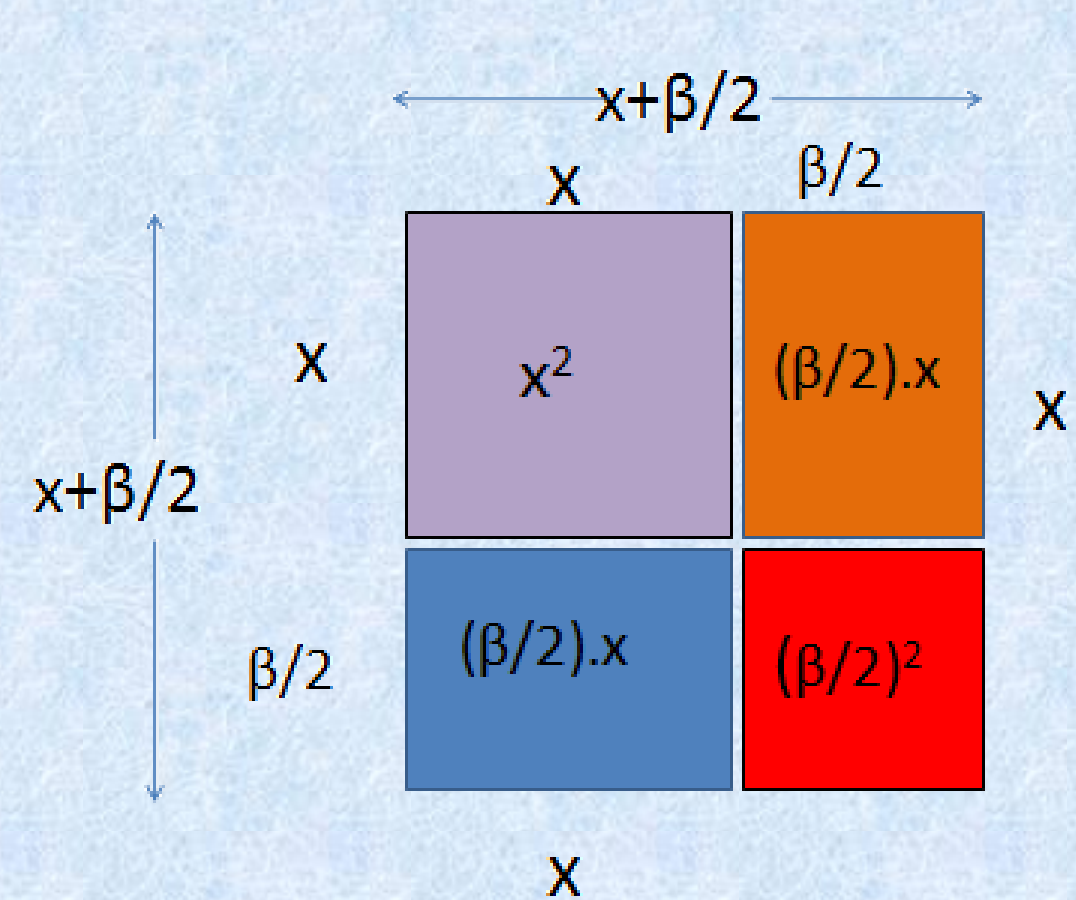
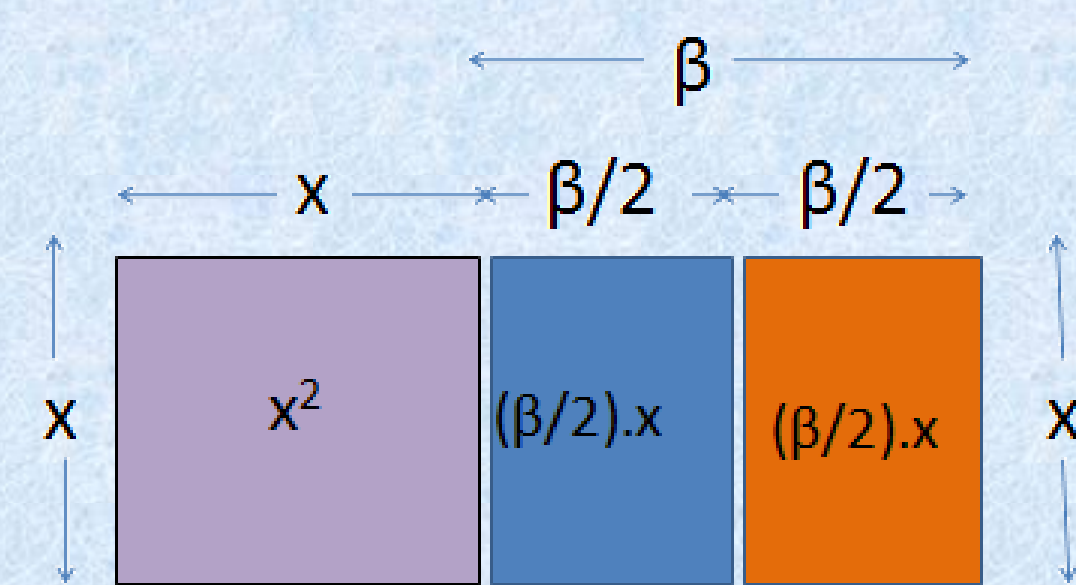
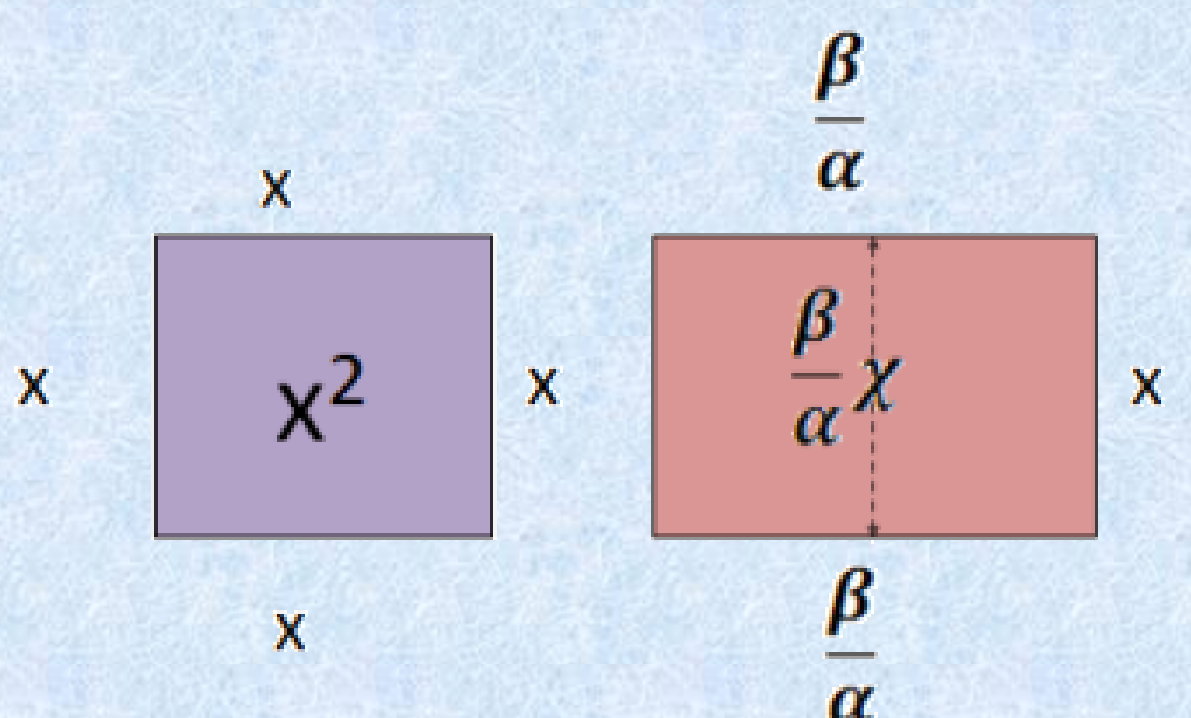
Εφαρμογή της ιδέας για την εξίσωση

$$x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Rightarrow x^2 + \beta x = -\gamma$$



Εφαρμογή της ιδέας για την εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha x^2 + \beta x = -\gamma \Rightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$



$$x^2 + 4x + c = 0$$

$$3x^2 + 2x + c = 0 \xrightarrow{-12} 36x^2 + 24x + 12c = 0 \rightarrow (6x)^2 + 4(6x) + c' = 0 \rightarrow t^2 + 4t + c' = 0$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η μέθοδος απαιτεί ένα σχετικά καλό γνωστικό υπόβαθρο αλγεβρικών γνώσεων και αλγεβρικών διαδικασιών όπως, παραγοντοποίηση, ταυτότητες και γνώση της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας. Όμως, για κάποιον μαθητή που δεν έχει αυτό το υπόβαθρο γνώσεων, η μέθοδος μπορεί να τον δυσκολέψει και είναι πολύ πιθανόν να απομνημονεύσει τη διαδικασία και τους τύπους που επιλύουν μια δευτεροβάθμια εξίσωση, χωρίς ποτέ να καταλάβει το γιατί είναι αυτοί τύποι και το πώς προκύπτουν.

Η οπτικοποίηση της γεωμετρικής ερμηνείας της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου με χρήση Lego, έστω και με τους περιορισμούς της (θετικοί συντελεστές για τους άγνωστους όρους της εξίσωσης), έδωσε την ευκαιρία σε μας και στους συμμαθητές μας να ανακαλύψουμε και να αντιληφθούμε τα χαρακτηριστικά της επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, γεγονός που παρέχει εξήγηση για την προέλευση του ονόματος και την εξαγωγή του τύπου των ριζών της εξίσωσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ** Ανδρεαδάκης Σ., Καταργήρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Παλιός Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Α., Δαμανός Χ. (2015). Άλγεβρα Α Λυκείου (Βιβλίο Μαθητή), ΥΠ.Ε.Π.Θ., Α ΕΚΔΟΣΗ, Αθήνα (2010)
- ** Θωμάδης Γ. (2011). Εξισώσεις και ανισώσεις δεύτερου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου. Διδακτορική Εξέταση ΖΗΤΗ.
- ** Σινωδινός Γ. (2010). Από την εφαρμογή των χωρίων στη σύγχρονη επίλυση εξισώσεων. ΕΚΠΑ, Αθήνα: Διπλωματική Εργασία. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Synodinou_figeneia.pdf
- ** Henderson, D. W. (2013). Geometric Solutions of Quadratic and Cubic equations. Department of Mathematics, Cornell University.
- ** Melville, D. (2005). The area and the side I added: Some Old Babylonian geometry. *Revue d'histoire des mathématiques*, 11(1), 7-22. http://zmfm4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/11/pdf/zmf_rm_11_7-21.pdf