



Εργαλεία σχεδίασης καμπυλών: Οι ελλειψογράφοι

Μαγνήσαλης Άγγελος

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Καλλιόπη Σιώπη , Μαθηματικός
Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διαπίστωση ήδη από τον 5^ο αι. π.Χ. ότι υπάρχουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών (όπως ο διπλασιασμός του κύβου, ο τετραγωνισμός κύκλου και η τριχοτόμηση γωνίας) που δεν μπορούν να επιλυθούν με τα ευκλείδεια μέσα (χάρακα- διαβήτη), οδήγησε στην ανακάλυψη άλλων καμπυλών εκτός του κύκλου και στην επινόηση εξειδικευμένων εργαλείων και μηχανισμών που να επιτρέπουν το σχεδιασμό τους μέσω της συνεχούς κίνησης.

Η εργασία εστιάζει στους μηχανισμούς που επινοήθηκαν και επιτρέπουν το σχεδιασμό της καμπύλης της έλλειψης, καθώς η έλλειψη και ο κύκλος ανήκουν στην ίδια κατηγορία καμπυλών και έχουν παρεμφερείς ιδιότητες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- Διερεύνηση της έννοιας της κωνικής καμπύλης (: κωνική τομή) από την άποψη της ιστορικής της προέλευσης
- Εστίαση στα βασικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες της έλλειψης,
- Χαρτογράφηση απλών εργαλείων σχεδίασης της έλλειψης.
- Κατασκευή και λειτουργία ενός υλικού μοντέλου, αντίγραφο ελλειψογράφου του Αρχιμήδη.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Κάθε κατασκευή προϋποθέτει τη χρήση ενός οργάνου/εργαλείου κατασκευής, ικανού να την πραγματοποιήσει..

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη διατυπώθηκαν με βάση τον κανόνα και τον διαβήτη και οι κατασκευές κατοχυρώνονται από τα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι.

α'. Αιτήσω από παντός σημείου επί πᾶν σημείον εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγῆν.

β'. Καί πεπρασμένην εὐθείαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβάλειν.

γ'. Καί παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψασθαι



ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Η εμφάνιση κατά την αρχαιότητα μη επιλύσιμων γεωμετρικών προβλημάτων με τα επιτρεπτά τότε εργαλεία κατασκευής,

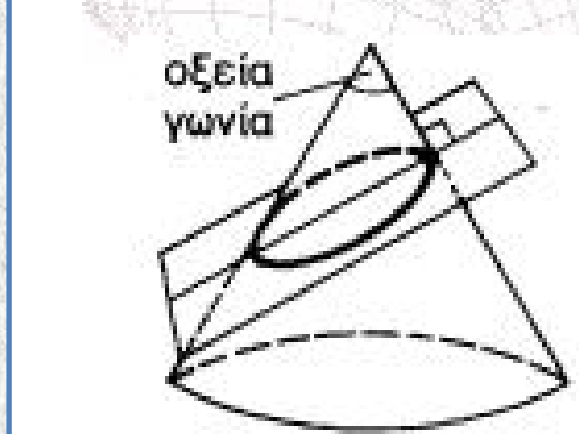
- οδήγησε στη διατύπωση ερωτημάτων κατά πόσο η λύση τους δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο με τον κανόνα και τον διαβήτη
- κινητοποίησε το ενδιαφέρον διαφόρων μαθηματικών-γεωμετρών να αναζητήσουν τις λύσεις τους μέσω της επινόησης και χρήσης άλλων εργαλείων.
- εμφανίζεται η κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών προβλημάτων σε α) *επίπεδα* (: αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με χάρακα και διαβήτη), β) *στερεά* (: εκείνα που επιλύονται με τη βοήθεια κωνικών καμπυλών) και γ) *γραμμικά* (:όλα τα υπόλοιπα) (Ευκλείδεια Γεωμετρία, 2015, σελ. 72; Μπρίκας, 1970).



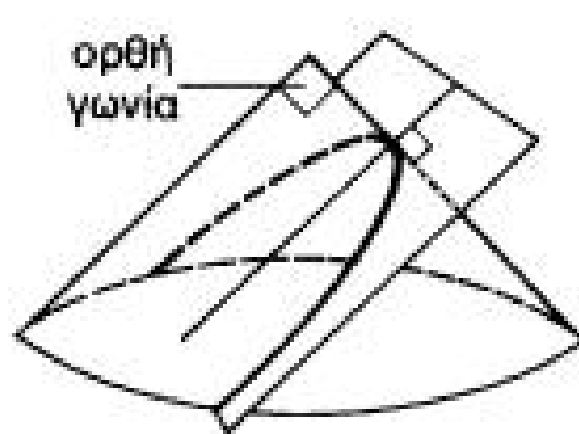
RENÉ DESCARTES

Ο Descartes στα πλαίσια της νέας γεωμετρίας του [La Géométrie, 1637] έδωσε απάντηση στο ερώτημα *πώς να γίνονται γεωμετρικές κατασκευές που δεν μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη και άλλαξε τους ρόλους του χάρακα και του διαβήτη από αποκλειστικά γεωμετρικά εργαλεία για τη γεωμετρία σε μηχανικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των μαθηματικών* (Μπρίκας, 1970; Tamina et al, 2007)

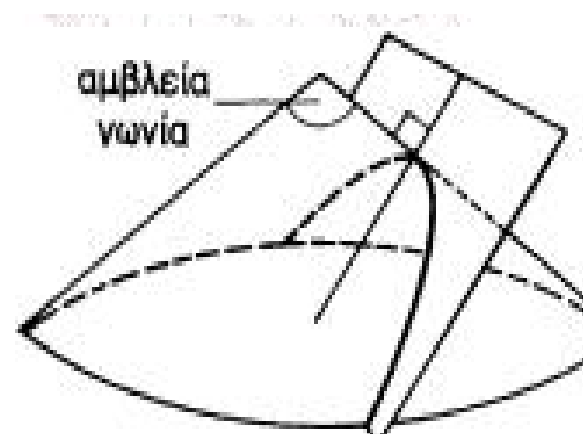
ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ



Έλλειψη



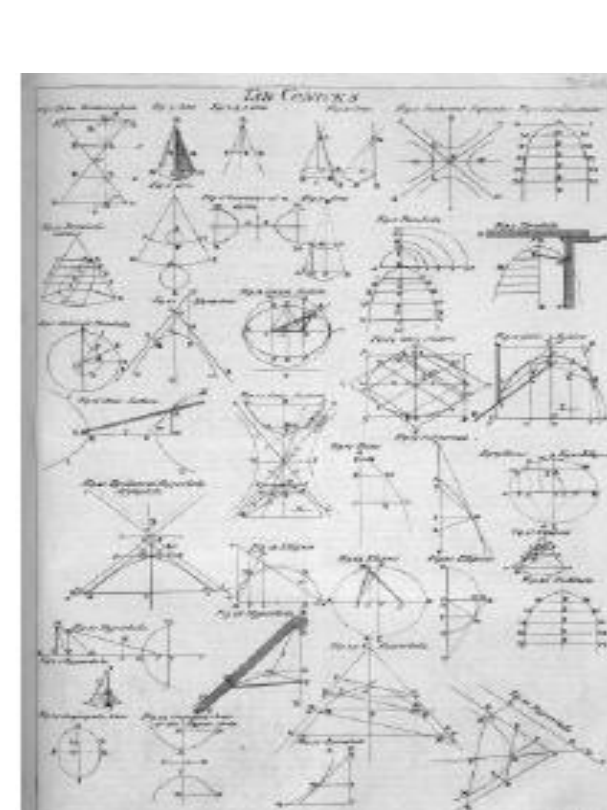
Παραβολή



Υπερβολή

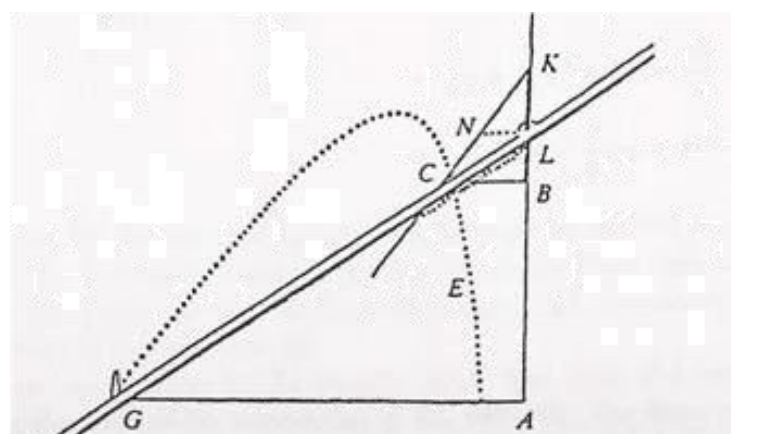
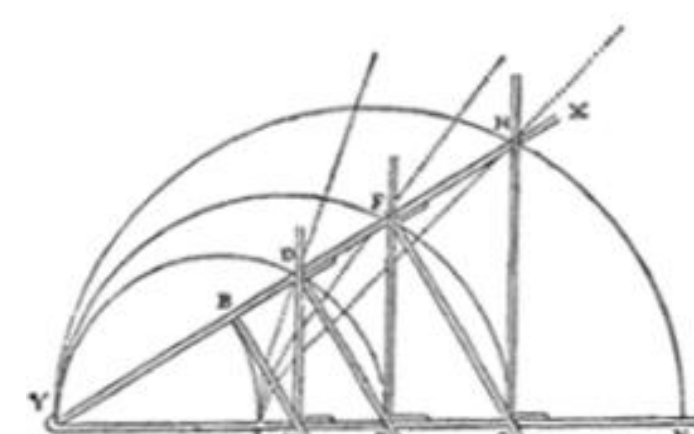
Ανάλογα με τη γωνία της κορυφής του κώνου (οξεία- ορθή- αμβλεία) οι καμπύλες ορίζονται ως 'οξυγώνιου' κώνου, 'ορθογωνίου' κώνου ή 'αμβλυγωνίου', αντίστοιχα

Ο όρος κωνική καμπύλη, καθώς και οι ειδικότερες ονομασίες 'έλλειψη', 'παραβολή' και 'υπερβολή' είναι μεταγενέστερες του Μεναιχμού και εισήχθησαν από τον Απολλώνιο,, το μέγα Γεωμέτρη.



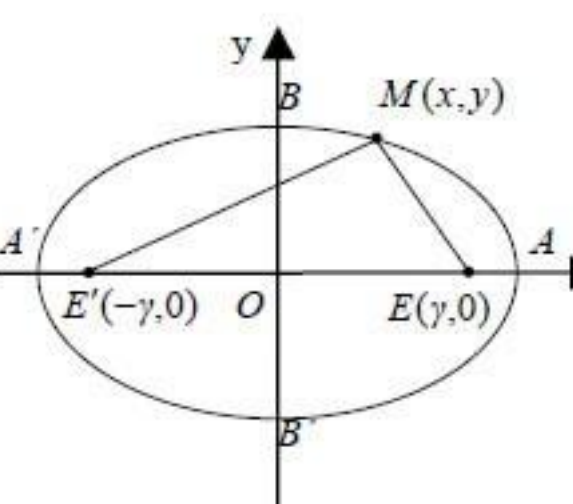
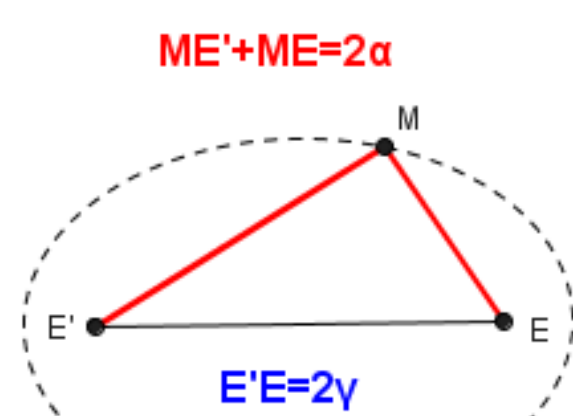
Πίνακας Κωνικών, Cyclopaedia, 1728, στο Barrallo et all, 2011

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ



Ο Descartes δεν κατασκευάζει καμπύλες μέσω της γραφικής απεικόνισης σημείων μιας εξίσωσης (Tamina et all, 2007), αλλά χρησιμοποιεί συνδεσμολογίες (μηχανικές κατασκευές) για να μελετήσει τις καμπύλες

Η ΕΛΛΕΙΨΗ

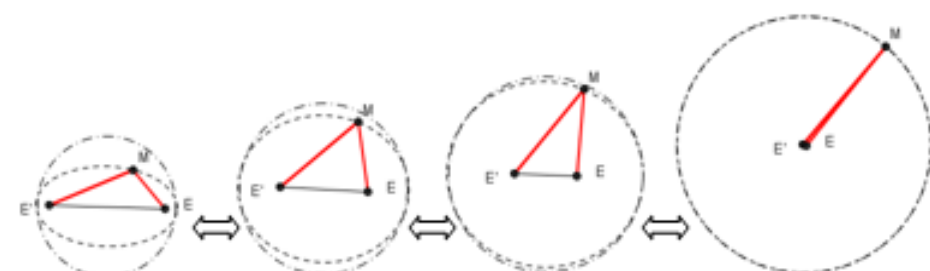


Έλλειψη: κλειστή καμπύλη του επιπέδου που κάθε σημείο της έχει την ιδιότητα το άθροισμα των αποστάσεων του από δυο σταθερά σημεία (εστίες) να είναι σταθερό.

Τρία στοιχεία προσδιορίζουν μια έλλειψη:

- Ο μεγάλος άξονας $A'A=2a$
- Ο μικρός της άξονας $B'B=2b$
- Η εκκεντρότητα $e=c/a$

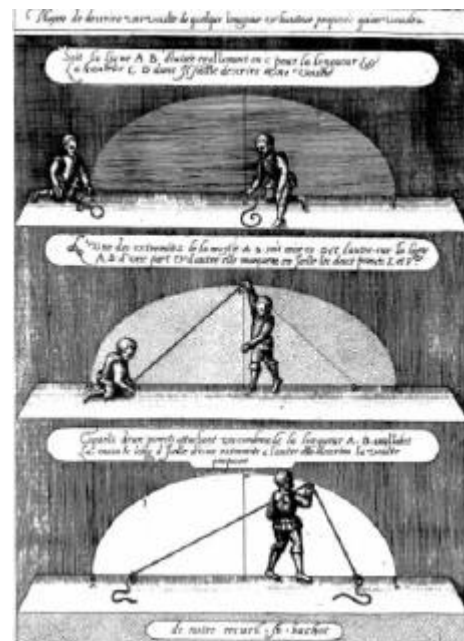
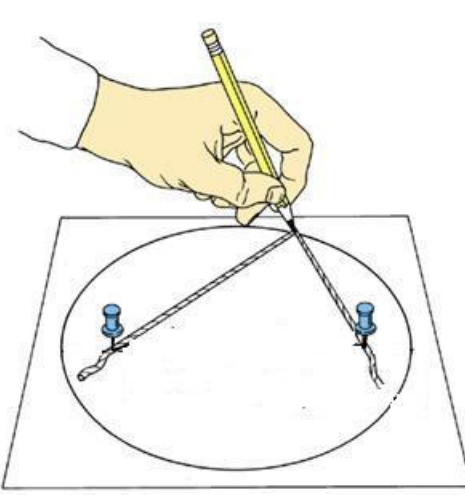
Αν το e τείνει στο μηδέν (τα σημεία E' και E τείνουν να ταυτιστούν) τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.
Ο κύκλος είναι μια ειδική κατηγορία έλλειψης.



Χάραξη έλλειψης με τη βοήθεια νήματος- Μέθοδος του κηπουρού (Descartes)

Σχεδίαση έλλειψης με σχοινί ή κορδόνι ή σπάγκο.
Χρονολογείται από την αρχαία Ελλάδα ή ακόμα και νωρίτερα .

Ο πρώτος που τη χρησιμοποίησε είναι ο Ανθέμιος ο Τραλλιανός, ένας από τους αρχιτέκτονες της Αγίας Σοφίας, τον 6ο αιώνα.



ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΧΑΡΑΞΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

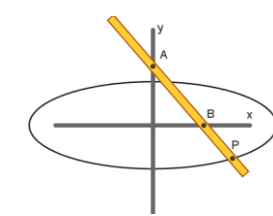
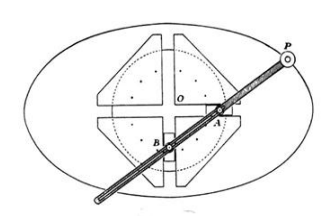
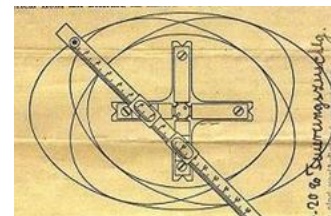
Ελλειψογράφος του Αρχιμήδη

Περιγράφεται από τον Πρόκλο (412-485 μ.Χ.), νεοπλατωνικό φιλόσοφο και διευθυντή της ακαδημίας του Πλάτωνα από το 450 μ.Χ. μέχρι το θάνατό του, αποδίδεται στον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.), μαθηματικός φυσικό και μηχανικό.

Διάταξη δυο ράβδων που φέρουν αύλακα και συνδέονται κάθετα στα μέσα τους.
Μια τρίτη ράβδος [AB] φέρει πείρους- οδηγούς σε σταθερές θέσεις [A, B] κατά μήκος της .

Η ράβδος αρθρώνεται στο σύστημα των δυο άλλων με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ένας από τους οδηγούς να κινείται μόνο στον αύλακα της ράβδου που έχει τοποθετηθεί.

Όταν οι οδηγοί κινούνται μπρος-πίσω, ο καθένας κατά μήκος του αύλακα που έχει τοποθετηθεί, τότε το άκρο [P] της ράβδου κινείται σε έλλειψη με άξονες τους αύλακες.



Σχηματικές αναπαραστάσεις του ελλειψογράφου του Αρχιμήδη

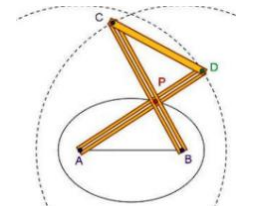
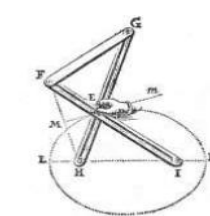
Ελλειψογράφος του Schooten - Αντιπαράλληλόγραμμο

Ο Frans van Schooten (1615-1660), ολλανδός καθηγητής των μαθηματικών, επινόησε συνδεσμολογίες για την κατασκευή κωνικών καμπυλών.

Συνδεσμολογία τεσσάρων ράβδων (AB, AD, BC, DC) που συνδέονται ανά δύο με αρθρώσεις (αρθρωτό τετράπλευρο) Οι ράβδοι AD,BC φέρουν αύλακα και συνδέονται με σύνδεσμο [P] έτσι ώστε $AP=PC$ και $PB=PD$.

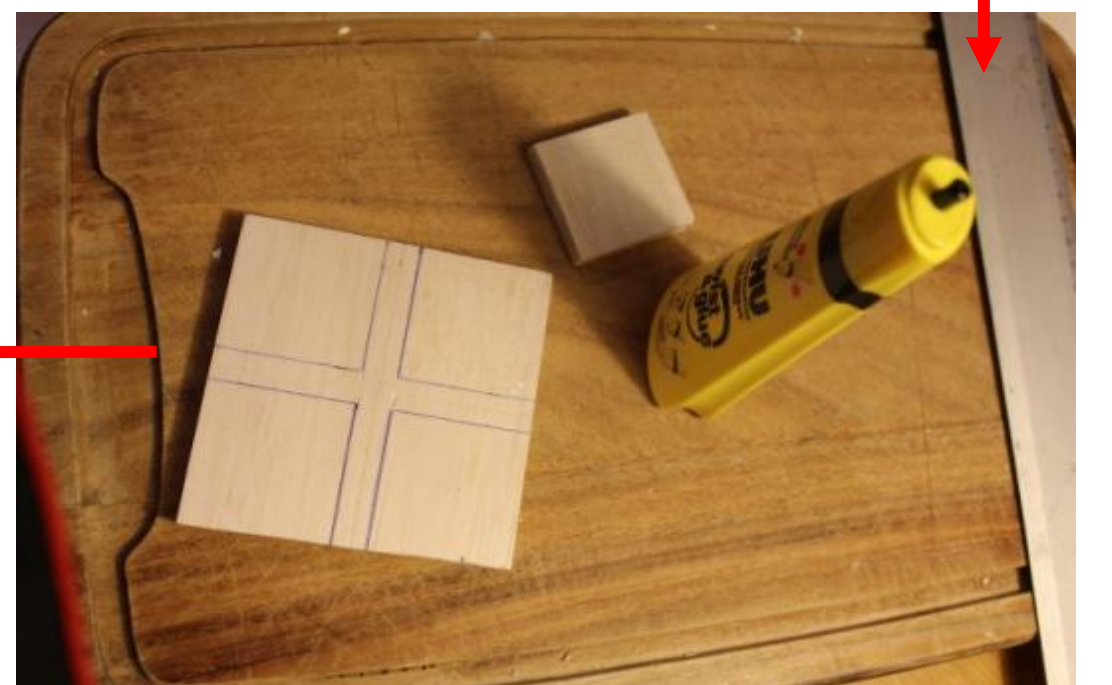
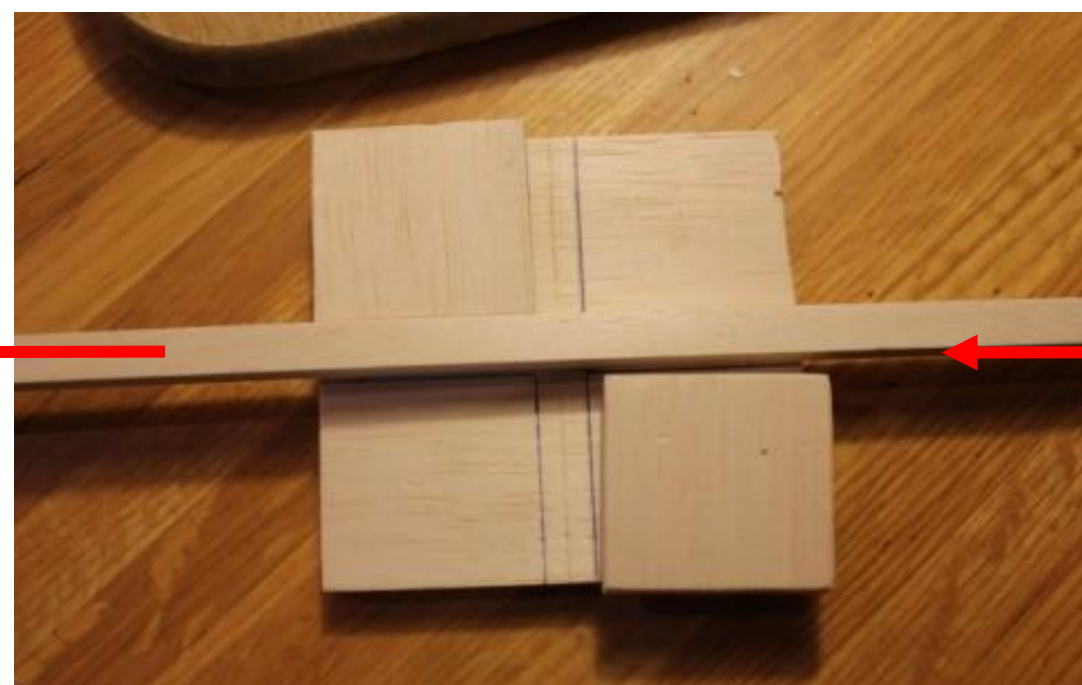
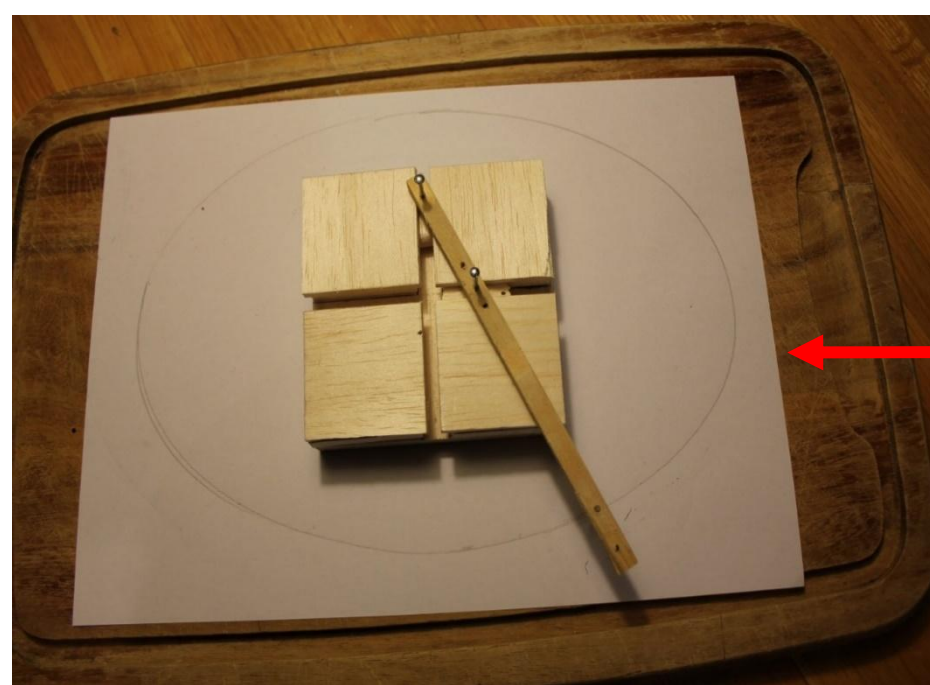
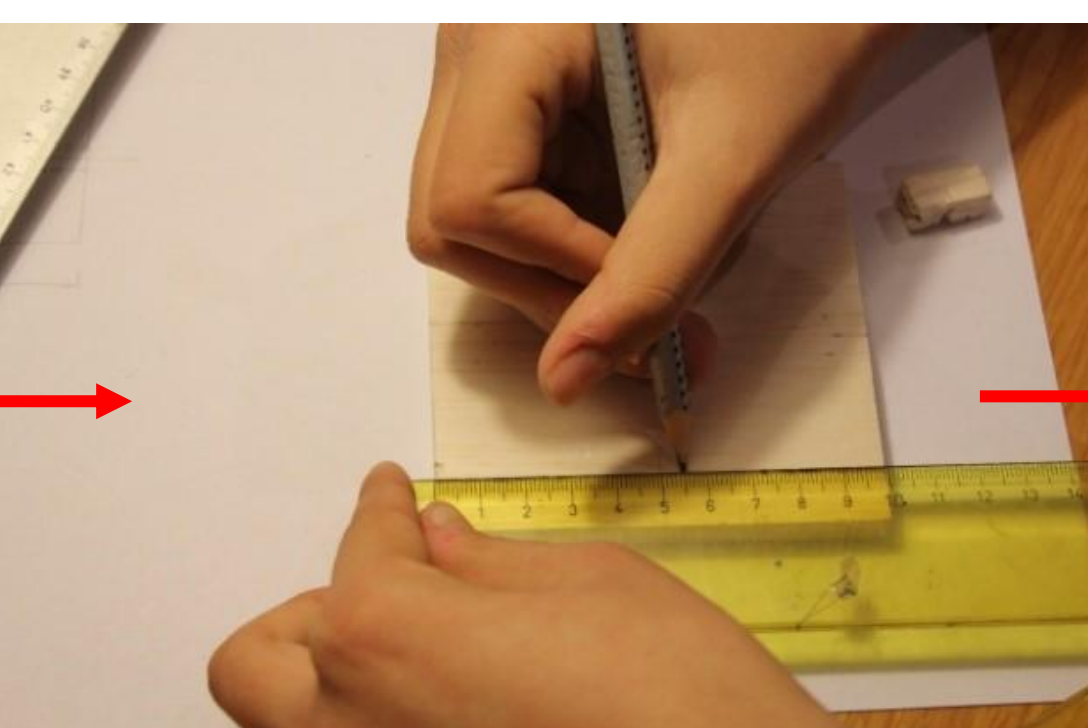
Η άρθρωση P μπορεί να ολισθαίνει στις αύλακες διατηρώντας την ισότητα των τμημάτων καθώς το αντιπαράλληλόγραμμο ABCD, ως ισοσκελές τραπέζιο, έχει άξονα συμμετρίας και το P ανήκει σε αυτόν. Επομένως θα είναι $PA+PB=PA+PD=AD$ =σταθερό

Αν μια από τις μικρότερες ράβδους (π.χ. AB) είναι στερωμένη πάνω σε μια επιφάνεια στα άκρα της, οι αρθρώσεις C και D κινούνται σε κύκλους με κέντρα τα A και B, ενώ η άρθρωσης P κινείται σε έλλειψη με εστίες τα A και B.

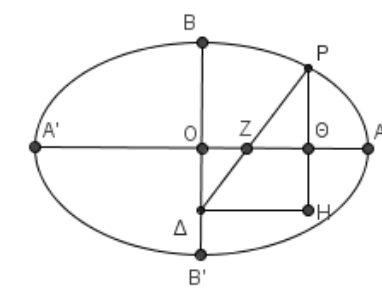


Αναπαραστάσεις μοντέλου ελλειψογράφου του Frans van Schooten

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΕΛΛΕΙΨΟΓΡΑΦΟΥ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ



Γιατί η καμπύλη που σχεδιάζει το εργαλείο είναι έλλειψη



Γεωμετρική αναπαράσταση του παραγόμενου σχεδίου από το εργαλείο

Όταν το σημείο Z βρεθεί στο O τότε το P θα βρεθεί στο B και όταν Δ βρεθεί στο O τότε το P θα βρεθεί στο A, ορίζοντας τους ημιάξονες $b=OB=ZP$ και $a=OP$ της έλλειψης αντίστοιχα.

Σχεδιάζουμε την κάθετη από το P στην OA και την κάθετη στην OB' στο Δ και έστω H το σημείο τομής τους

- Τότε $\frac{PO}{PH} = \frac{PZ}{PD}$ λόγω των όμοιων τριγώνων PZO και PΔH.
- Όμως, $PZ=OB=OB'$ και $PΔ=OA=OA'$, άρα $\frac{PO}{PH} = \frac{OB'}{OA'}$ (1) .
- Επίσης, $PH^2 = PA^2 - AH^2 = OA'^2 - OH^2$ (2).
- Τότε, η (1) γίνεται $PO^2 = \frac{OB'^2}{OA'^2} \cdot PH^2 = \frac{OB'^2}{OA'^2} \cdot (OA'^2 - OH^2)$ (3).
- Αν $P(x, y)$ τότε $PO=y$, $OH=x$ και $OA'=a$, $OB'=b$, τότε η (3) γίνεται:
 $y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
που είναι εξίσωση έλλειψης.

ΕΝ ΚΑΤΑΚΛΕΙΔΙ

Η έρευνα με πλαίσιο την ιστορία των Μαθηματικών και η διαφορετική προσέγγιση των χαρακτηριστικών της κατασκευής και της λειτουργίας του συγκεκριμένου τεχνήματος, του ελλειψογράφου, του έδωσε μια άλλη διάσταση: το *τέχνημα μετασχηματίστηκε σε μαθηματικό εργαλείο που ενσωματώνει στην κατασκευή του γεωμετρικές ιδιότητες και μαθηματικές σχέσεις και επιλύει προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών που δεν μπορεί να επιλυθούν με τα παραδοσιακά γεωμετρικά εργαλεία, το χάρακα και το διαβήτη.*

Η ανάλυση των χαρακτηριστικών της δομής και της λειτουργίας του εργαλείου και η συσχέτισή τους με τη γεωμετρική θεωρία συνέβαλε στην εμπέδωση εννοιών και διαδικασιών όπως αυτών των χαρακτηριστικών μιας γεωμετρικής κατασκευής, της έννοιας του γεωμετρικού τόπου, των μετρικών σχέσεων και της ομοιότητας τριγώνων, αλλά και στην επέκταση των γνώσεων για τα χαρακτηριστικά ενός άλλου πεδίου των μαθηματικών αυτού της Αναλυτικής Γεωμετρίας, στο πλαίσιο του οποίου η μελέτη των μαθηματικών που ενσωματώνει ο ελλειψογράφος γίνεται άμεσα κατανοητά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αδαμόπουλος Α., Βικαδοπούκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (2015). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
- Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάκης Σ., Σιδερής Π. (2015). *Ευκλείδεια Γεωμετρία*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
- Μπρίκας Μ.Α. (1970). *Τα πρόβλημα άλλατα προβλήματα της αρχαιότητας*. Αθήνα.
- Barrallo, J., & Olariu, E. A. R. (2011). Many Conics and Ellipses in Architecture. In *Proceedings of ISAMA 2011 Tenth Interdisciplinary Conference of the International Society of the Arts, Mathematics, and Architecture*, Columbia College, Chicago, Illinois (pp. 9-18).
- Tamina, D., Pan, B., Gay, G., Saylor, J., Hemmroke, H., Henderson, D., ... & Paventi, C. (2007). Historical mechanisms for drawing curves. *Hands On History: A Resource for Teaching Mathematics*, 89-104.